FORMAÇÃO DO CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO MATEMÁTICO NA LICENCIATURA: princípios e propostas

Profissão Docente

CEAPEA
Centro de Estudos Aplicados em Práticas de Ensino e Aprendizagem

Sobre o Movimento Profissão Docente

Somos uma coalizão de organizações do terceiro setor e acreditamos que os professores transformam a educação atuando em seu pleno potencial.

Trabalhamos de maneira suprapartidária e pautados por evidências e experiências bem-sucedidas, apoiando governos de todo o país na construção de políticas docentes que possam garantir que todo estudante tenha professores bem preparados, motivados e com boas condições de trabalho.

Há muitos caminhos para transformar a educação, todos eles passam pelos professores!

Conheça mais sobre a nossa agenda em **profissaodocente.org.br**.

Profissão Docente

O Movimento é promovido por

instituto península · Fundação Lemann · Itaú Social · FLUPP Fundação Lucia & Pelerson Penido · instituto natura · Instituto Unibanco · Todos pela Educação · Fundação Telefônica Vivo

Expediente

Organização

Movimento Profissão Docente

Coordenador-geral

Haroldo Rocha

Líder de Formação

Camila Naufel

Líder de Desenvolvimento Profissional

Maria Cecília Gomes

Coordenador de
Formação Inicial Docente

Pedro Murgel Hsia

Organizadora

Bárbara Barbosa Born

INSTITUTO PENÍNSULA

Conselho Editorial

Diretora Executiva

Heloisa Morel

Diretora de Desenvolvimento e Parcerias

Daniela Kimi

Diretora de Políticas Educacionais

Mariana Breim

Diagramação

Estúdio Arandu

CENTRO DE PESQUISAS APLICADOS EM PRÁTICAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM (CEAPEA)

Conselho Editorial

Diretora

Bárbara Born

Coordenador de Implementação de Pesquisa

Arthus Bustamante

Analista de Pesquisa

Pedro Henrique Pereira

Estagiária

Poliana Macedo

GRUPO DE TRABALHO EM CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO EM MATEMÁTICA (2025)

Aline dos Reis Matheus
Bruno Dias Amaro
Cleberson de Lima Mendes
Cristiane Chica
Disney Douglas de Lima Oliveira
Leonardo Barrichello
Marcelo Firer
Rita Santos Guimarães
Roberto Cesar Cucharero Peregrina
Silmara Louise da Silva

Sumário

Carta de Apresentação

A literatura tem evidenciado, de forma consistente, a centralidade da profissão docente para a qualidade da educação. Professores e professoras são reconhecidos como os fatores escolares que mais contribuem para a aprendizagem dos estudantes. Embora esta afirmação soe familiar, é fundamental reiterá-la e tratá-la com a seriedade necessária, pois somente assim avançaremos na construção de políticas públicas estruturadas e estruturantes, capazes de transformar a realidade educacional do país.

É com essa convicção que o Movimento Profissão Docente trabalha a partir de uma agenda sistêmica, que considera a trajetória dos profissionais desde a formação inicial, passando pelo ingresso na carreira, seu desenvolvimento e formação continuada. Apesar de esses pilares serem amplamente discutidos, articular essas políticas em uma lógica integrada, coerente e estratégica é um movimento inovador e revela tanto a urgência quanto a importância do tema.

No âmbito dessa agenda, a Formação Inicial Docente ocupa um lugar central. Um ponto recorrente nas pesquisas e nas experiências internacionais de sucesso é a compreensão de que formar professores implica no processo de desenvolvimento e articulação do conhecimento do conteúdo com o conhecimento pedagógico do conteúdo e com o entendimento de quem são os estudantes e seu desenvolvimento. Em termos simples, trata-se da capacidade do professor de transformar um conhecimento disciplinar em formas que seus alunos possam compreender, considerando seus contextos, repertórios e experiências. Esse conceito, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (CPC), foi formulado por Lee Shulman (1986, 1987), que defendeu existir um saber específico da docência que não se reduz ao domínio do conteúdo nem às técnicas pedagógicas isoladamente.

Desde 2023, o Movimento Profissão Docente fomenta um Grupo de Trabalho dedicado ao CPC em Matemática, com o objetivo de aprofundar esse conceito e compreender como ele pode orientar políticas públicas para a formação, seleção e desenvolvimento de professores. Composto por pesquisadores, professores da Educação Básica, acadêmicos e gestores públicos, o GT avançou significativamente nesse debate. Em 2024, a publicação de Lira, Firer, Barichello e Guimarães sistematizou como o CPC pode ser incorporado em diferentes políticas docentes. Em 2025, o grupo deu um passo adicional: discutir como aterrissar essas reflexões no Ensino Superior, isto é, como seria estruturar um curso de licenciatura em Matemática orientado pelo desenvolvimento do CPC ao longo da formação.

Partimos do princípio de que ainda existem poucos exemplos concretos de cursos que consigam articular, de forma sólida, a aprendizagem do conteúdo específico com a aprendizagem para o ensino. Por isso, o esforço do GT foi o de construir exemplos reais, detalhados e viáveis de programas expandidos de disciplina que expressem essa articulação e possam inspirar instituições de ensino superior em seus próprios processos de revisão curricular.

O convite que fazemos, portanto, é para que você, leitor ou leitora, conheça a metodologia que orientou esse trabalho e explore os programas de disciplina aqui apresentados. Embora esta publicação esteja centrada na área de Matemática, ela registra uma abordagem de trabalho que pode inspirar construções semelhantes em outras licenciaturas. Não se trata de uma proposta fechada, mas de uma contribuição ao debate público e profissional, uma provocação para que novas reflexões e avanços possam emergir.

Boa leitura.

CONHECIMENTO PEDAGÓGICO

do Conteúdo na Formação Inicial Docente: caminhos para reformulação curricular

Bárbara Born

Conhecimento pedagógico do conteúdo na formação inicial docente: caminhos para reformulação curricular

Bárbara Barbosa Born[1]

A promoção da qualidade educacional passa necessariamente por uma reflexão sobre como formamos nossos professores. Embora saibamos que os docentes são os principais atores no processo de melhoria da aprendizagem (BRUNS; LUQUE, 2014; CHETTY; FRIEDMAN; ROCKOFF, 2014; HANUSHEK, 2011; HANUSHEK; RIVKIN, 2010), estamos distantes da construção de uma formação inicial que efetivamente prepare esses profissionais para os desafios da prática. Ainda hoje, existe uma compreensão fortemente presente tanto no senso comum como no desenho dos programas de formação inicial docente de que dominar profundamente os conteúdos disciplinares é o principal requisito para ser um bom professor. Essa visão está calcada em um paradigma de ensino como transmissão de conteúdos e aprendizagem como um processo de absorção quase automática, e ignora a complexidade cognitiva e profissional da docência (KENNEDY, 1999). A prática, neste modelo formativo, é vista como algo a ser desenvolvido na escola, seja no estágio supervisionado, seja no início da atuação profissional, na qual o professor "pegará o jeito".

Essa perspectiva de formação carrega dentro de si dois paradigmas importantes, um referente ao conteúdo e outro ao ensino. No que tange ao conteúdo, entende-se que o **objeto de conhecimento essencial** do professor é o saber disciplinar, ou seja, que o conteúdo necessário para um professor de matemática é o saber da álgebra, da aritmética e da geometria, assim como o saber estruturante de um professor de história é o entendimento dos eventos históricos e como a historiografia os relatou ao longo do tempo. O conteúdo sobre o ensino entra no processo de formação do docente de forma complementar, geralmente isolado dos saberes disciplinares específicos, assumindo-se que a integração se dará por meio da atuação em sala de aula.

O segundo paradigma implícito nesta perspectiva de formação diz respeito à especificidade do ato de ensinar. Desconsiderar os saberes específicos conectados ao ensino de cada um dos conteúdos disciplinares esvazia o caráter profissional da docência. Esta visão acaba por assumir que o ato de ensinar é quase natural, decorrente da construção de saberes sobre os tópicos a serem transmitidos (LAMPERT, 2010).

[1] Lates: http://lattes.cnpq.br/5304538478088889

Os problemas decorrentes dessa perspectiva são amplamente conhecidos: currículos fragmentados e pouco alinhados à realidade das escolas, e licenciaturas que oferecem aos futuros professores contato reduzido com as formas pelas quais os alunos pensam, aprendem, erram e constroem sentido. Há, portanto, um desalinhamento significativo entre o que se ensina na universidade e o que o professor precisa saber para ensinar, um desalinhamento identificado tanto por pesquisas brasileiras quanto internacionais nas últimas décadas (BORN, 2019; GATTI, 2010; LOUGHRAN; BERRY; MULHALL, 2012).

É nesse contexto que o conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo (CPC) se tornou uma chave interpretativa decisiva e, ao mesmo tempo, um horizonte formativo capaz de reorientar como pensamos o fazer docente e o papel da formação inicial. O CPC foi proposto inicialmente por Lee Shulman (1986, 1987), ao discutir que existe um saber específico da docência que unifica o conteúdo disciplinar e o conhecimento pedagógico. De acordo com as ideias propostas pelo autor, os conteúdos matemáticos, históricos ou de linguagem que um professor precisa dominar não são os mesmos que um bacharel precisa, não porque sejam "simplificados", mas sim porque são mais complexos. Além dos saberes disciplinares, um professor precisa entender como melhor representar essas ideias, como elas podem ser reconstruídas por outros, como crianças, jovens e adultos as aprendem, que tipos de dificuldades normalmente apresentam e como podem lidar com os obstáculos típicos de diferentes trajetórias de aprendizagem. Essa formulação trouxe uma mudança epistemológica significativa: o conteúdo a ser ensinado deixa de ser um conjunto de informações estáveis e prontas, e passa a ser um objeto pedagógico, algo que ganha forma a partir da interação entre um professor, um grupo específico de estudantes e um determinado contexto.

Ao longo das quase quatro décadas desde que este conceito foi elaborado, muitos estudos expandiram e sofisticaram a visão proposta por Shulman (1986, 1987). Grossman, Schoenfeld e Lee (2005) mostraram que o CPC envolve a capacidade de antecipar padrões de compreensão e incompreensão, selecionar exemplos adequados, formular explicações que iluminam relações conceituais e ajustar representações conforme as necessidades de diferentes aprendizes. Loughran, Berry e Mulhall (2012) aprofundaram essa perspectiva ao afirmar que o CPC não é um conjunto de técnicas isoladas, mas uma articulação sofisticada entre decisões pedagógicas e decisões conceituais, sempre orientadas pela aprendizagem dos estudantes e pela construção de significados que façam sentido em um contexto real de sala de aula.

No campo do ensino de matemática, os estudos de Deborah Ball e colegas (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) reforçaram a ideia de que um bom professor precisa construir um repertório profundo de conhecimento do conteúdo em associação ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Não se trata apenas de focalizar nos saberes restritos ao currículo da educação básica: um professor precisa desenvolver um conhecimento especializado do conteúdo, associado a conhecimentos de fronteira, em articulação com o conhecimento pedagógico do conteúdo, que envolve a relação do conteúdo com a aprendizagem dos estudantes, as estratégias de ensino ligadas ao conteúdo, e a organização do conteúdo no currículo da educação básica.

Em uma das discussões mais atuais sobre CPC, envolvendo pesquisadores de diversos países (CARLSON *et al.,* 2019), outros aspectos foram acrescentados à definição do conceito. Para os participantes deste grupo de pesquisadores, a base de conhecimento que compõe o CPC congrega os saberes disciplinares associados ao conhecimento pedagógico, tanto geral quanto específico de cada tópico disciplinar, saberes sobre os estudantes e como eles aprendem, conhecimento curricular e sobre avaliação. Um elemento importante na discussão proposta pelos autores é que o conhecimento pedagógico do conteúdo não é apenas algo oriundo da pesquisa: ele se desenvolve tanto individual quanto coletivamente, à medida que os professores constroem repertórios sobre os processos de aprendizagem em suas experiências práticas e trocam esses repertórios com seus pares.

Lira, Barrichello, Firer e Guimarães (2025) sistematizaram a discussão sobre CPC no campo da matemática, a partir de trocas com os participantes do grupo de trabalho que originou também o presente relatório. Focando especificamente no desenvolvimento do repertório de futuros professores de matemática, os autores destacam seis aspectos a serem desenvolvidos em sua formação:

1. Elaborar e utilizar explicações de um conteúdo matemático, avaliando sua adequação e correção;
2. Elaborar/selecionar representações e exemplos para apresentar um determinado objeto, conceito, fato ou procedimento matemáticos;
3. Estabelecer/reconhecer conexões entre um dado conteúdo e tópicos precedentes ou subsequentes (na organização do currículo, no desenvolvimento cognitivo ou das etapas de escolaridade);
4. Avaliar e adaptar o conteúdo matemático de livros e outros recursos didáticos;
5. Selecionar e propor tarefas, ajustando-as a objetivos de aprendizagem e a diferentes níveis de complexidade cognitiva e dificuldade técnica;
6. Utilizar avaliações formativamente, provendo devolutivas adequadas aos estudantes (LIRA; BARRICHELLO; FIRER; GUIMARÃES, 2025, p. 13).

Atrelado a essa perspectiva está o entendimento de que não se desenvolve CPC oferecendo um *kit* de práticas reproduzíveis ao professor. O CPC não é empacotável e reproduzível, pois ele reside exatamente no entendimento dos mecanismos da atividade e sua relação com a aprendizagem dos estudantes específicos para os quais se ensina. Posto de outra forma, trata-se de um entendimento metacognitivo profundo do docente, o que pressupõe formação permanente e reflexão estruturada sobre a prática.

Nesse sentido, a experiência de aprendizagem do licenciando e as explorações que ele faz dos diferentes conteúdos disciplinares à luz do ensino são essenciais para que ele possa desenvolver o seu CPC. A partir dessa evolução teórica, fica cada vez mais evidente que o CPC é uma forma especializada de conhecimento profissional, que não se reduz ao domínio dos conteúdos disciplinares, tampouco às técnicas de manejo de sala de aula. Reside na capacidade de mobilizar o conteúdo para promover aprendizagem, e isso exige compreender o estudante, suas formas de pensar, seus contextos, sua variabilidade e suas oportunidades de desenvolvimento.

Se aceitarmos que o CPC é o coração da atividade docente, não podemos delegar sua construção ao acaso ou ao improviso da prática profissional posterior. O currículo das licenciaturas precisa ser revisitado e as disciplinas repensadas para que o futuro professor possa desenvolver, de maneira articulada e coerente, tanto seu saber matemático (ou histórico, geográfico, linguístico) quanto seu entendimento sobre a aprendizagem e o ensino desses saberes. O Grupo de Trabalho (GT) em CPC matemático visou contribuir para a reflexão sobre como esse currículo pode ser revisitado e incorporar o desenvolvimento do CPC. Esse GT é organizado pelo Profissão Docente, em parceria com o Centro de Estudos Aplicados em Práticas de Ensino e Aprendizagem (Ceapea), do Instituto Península.

Ao longo do ano de 2025, o grupo trabalhou coletivamente na elaboração de três programas expandidos de disciplina que podem inspirar docentes das licenciaturas em matemática na elaboração de currículos que sejam mais deliberados quanto ao desenvolvimento do CPC de futuros professores. Esse material complementa a revisão de literatura produzida pelo grupo (LIRA; BARRICHELLO; FIRER; GUIMARÃES, 2025) como parte de um esforço de contribuição para o campo da formação inicial docente no Brasil.

A seguir, apresentamos a metodologia adotada na elaboração dos programas de disciplina, que focou na garantia do desenvolvimento do CPC.

Elaboração metodológica para criação dos programas de disciplina

O processo de elaboração de uma disciplina do ensino superior pode ocorrer de muitas formas. Geralmente, segue-se uma estrutura de "ementas" pré-definidas no Projeto Pedagógico de Curso (PPC), e as disciplinas tendem a ser centradas nos conteúdos de ensino. Embora esse não seja um processo completamente distante daquilo que ocorre na educação básica, a tendência de focar o processo de planejamento no conteúdo é ainda mais forte nos cursos de graduação, visando ao cumprimento do currículo definido pela universidade.

A construção do repertório por meio do acesso ao conteúdo estruturante nos diferentes cursos de ensino superior é essencial na formação de qualquer profissional. Todavia, a elaboração de um programa de disciplina que parte da lógica de distribuição do conteúdo no tempo ignora a peça-chave do processo: o aprendiz. O pressuposto que está por trás desse modelo é que a **apresentação** do conteúdo leva, necessariamente, à **aquisição** desses saberes por parte dos estudantes. Não há uma atenção deliberada aos **processos de aprendizagem** que precisam ser percorridos pelos estudantes para que alcancem o repertório desejado.

Outra limitação importante do modelo centrado no conteúdo é a ausência de clareza quanto a quais processos cognitivos e aplicações desse conteúdo serão desenvolvidos no período de estudos proposto. É muito diferente, por exemplo, aprender **conceitualmente** o que é uma função de resolver problemas que envolvam funções. Ainda mais complexo é compreender como crianças e jovens aprendem essas funções e quais são as estratégias adequadas para ensiná-las. A clareza quanto aos processos cognitivos e aplicações associados ao conteúdo orientam melhor o docente da disciplina quanto às escolhas metodológicas, estratégias avaliativas e seleção de materiais de leitura.

Nesse sentido, propor modelos de programas de disciplina focados no desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo não poderia ser feito ignorando a maneira como os licenciandos desenvolveriam esse saber, ou seja, pensando na experiência de aprendizagem dos futuros professores. Mais especificamente, compreendemos que seria necessário um processo que levasse em consideração dois movimentos. Primeiro, seria necessária uma compreensão profunda da relação entre o conteúdo disciplinar e o ensino ou, em outras palavras, um processo de evidenciar o conhecimento pedagógico do conteúdo em si. Depois, ao desenhar o programa de ensino, partir de algum modelo que centrasse a proposta de ensino na aprendizagem dos licenciandos para fugir da lógica focada no conteúdo.

Esse trabalho foi feito partindo de dois modelos de referência que nos ajudaram a dialogar com os pontos citados anteriormente. O primeiro trabalho realizado foi explorar, dentro de um recorte de conteúdo, as interfaces com o ensino e as relações existentes entre a aprendizagem no ensino superior e na educação básica. Para isso, utilizamos uma versão adaptada do modelo de representação de conteúdo ou CoRe (acrônimo para o termo *Content Representations*) de Loughran, Berry e Mulhall (2012). O modelo foi criado originalmente para que professores da educação básica pudessem explorar as grandes ideias do conteúdo disciplinar e refletir sobre as diferentes representações e estratégias de ensino. Mostrou-se, assim, muito eficaz para aprofundar o entendimento das diferentes dimensões de tópicos no ensino superior.

No desenho original do CoRe, os professores exploram o conteúdo disciplinar partindo da identificação de grandes ideias que precisam ser aprendidas por seus estudantes. Para cada uma dessas ideias, os professores respondem a oito perguntas que exploram diferentes facetas do conhecimento pedagógico do assunto. Por exemplo, explora-se por que o conteúdo é importante para os estudantes, aspectos ligados à grande ideia que ainda não serão explorados (mas precisam ser considerados, ou seja, consideração sobre a progressão curricular), as principais dificuldades ligadas ao ensino da grande ideia, dificuldades corriqueiras e interpretações alternativas que os estudantes possam ter, além da antecipação de estratégias específicas para o ensino da grande ideia (LOUGHRAN; BERRY; MULHALL, 2012). Essa atividade apoia o educador no processo de "desempacotamento" e apresentação dos aspectos mais relevantes do conteúdo à luz do ensino, ou seja, estrutura o conhecimento pedagógico situado no recorte específico que precisa ser ensinado.

No contexto do grupo de trabalho, utilizamos uma versão adaptada à formação de professores em licenciaturas, o que pressupunha pensar o conteúdo em relação a três camadas específicas: a aprendizagem do conteúdo matemático em si pelo licenciando (incluindo as grandes ideias disciplinares envolvidas), a aprendizagem desse conteúdo matemático pelos estudantes na educação básica, e a aprendizagem dos processos de ensino do assunto. Assim, por exemplo, além de explorar a importância da aprendizagem do conteúdo por si mesmo, os participantes do GT exploraram a importância dessa aprendizagem do ponto de vista do ensino. Foi proposto, igualmente, que os participantes explorassem as grandes ideias pedagógicas envolvidas no ensino do conteúdo e como elas se traduziriam na educação básica. Para refletirem sobre como os aprendizes processariam esse conteúdo, os participantes do GT também exploraram quais interpretações parciais ou alternativas os licenciandos trariam para a experiência de aprendizagem do conteúdo matemático que poderiam interferir em sua aprendizagem. Associado a essa reflexão, eles refletiram sobre quais potenciais compreensões ou incompreensões os licenciandos teriam sobre o ensino desse conteúdo que poderia interferir na maneira como processam a aprendizagem do CPC. Com base nesta reflexão, eles puderam antecipar o que precisaria ser considerado na hora de construir um programa de disciplina e que tipo de ferramentas, leituras e estratégias precisariam para sua construção. No Anexo 1 temos disponível o modelo adaptado do CoRe para reflexão no ensino superior.

O objetivo de realizar este exercício antes de iniciar a construção do programa expandido de disciplina foi explorar as dimensões da **aprendizagem** do conhecimento pedagógico do conteúdo antes de iniciar o desenho da experiência de aprendizagem dos licenciandos. Para essa ativação, um grupo reduzido de três professores universitários que compunham o grupo sugeriu que nosso recorte de conteúdo fosse a álgebra. Os membros do GT exploraram o modelo CoRe a partir de um conteúdo da álgebra que elencaram como estruturante. Essa experiência serviu como ativação inicial e deu as bases para a segunda etapa do processo, que foi o desenho específico do programa expandido de disciplina.

A construção do modelo expandido de disciplina foi realizada a partir do modelo teórico proposto por Wiggins e McTighe (2005, 2019) denominado **"planejamento para a compreensão"**. Em linhas gerais, a ideia defendida pelos autores é que o processo de planejamento curricular em qualquer etapa de ensino precisa estar centrado no **aprendiz** e, mais especificamente, no desenvolvimento de sua **compreensão**. Uma compreensão é um construto mental, uma abstração feita pela mente humana para dar sentido a muitos fragmentos de conhecimento. Ela se diferencia do mero "saber" (conhecimento) na medida em que demanda articulação de diferentes saberes, criação de uma rede operativa de ideias, conceitos, e capacidade de aplicação deles em diferentes contextos.

Um dos pressupostos do processo de compreensão, portanto, é que ele demanda a identificação de **quais conhecimentos** (fatos, conceitos, ideias centrais, entre outros) e **habilidades** (procedimentos, aplicações) são necessários para que o aprendiz possa construir sentido sobre uma determinada ideia, construindo um saber que seja transferível. Tal compreensão é observada especialmente mediante o enfrentamento de situações problemas que exigem a aplicação flexível, seletiva e deliberada de um conjunto de conhecimentos e habilidades.

No contexto da formação de futuros professores e do desenvolvimento de CPC, espera-se que os licenciandos desenvolvam uma compreensão profunda sobre como os diferentes saberes matemáticos estão conectados entre si e de que maneira eles são aprendidos pelos estudantes. Isso requer o desenvolvimento de habilidades de representação desses conteúdos, elaboração de atividades que estimulem a aprendizagem dos diferentes assuntos pelos estudantes da educação básica, e a construção de um repertório de práticas para aplicação e transferibilidade desses saberes em outros contextos. Considerando esta especificidade, adotamos como referência o modelo de planejamento reverso proposto pelos autores na construção de modelos de programas expandidos que fossem efetivos no desenvolvimento da compreensão dos licenciandos.

A proposta de planejamento reverso (WIGGINS; MCTIGHE, 2005, 2019) rompe com o modelo centrado no conteúdo ao propor estratégias centradas na aprendizagem dos estudantes e no desenvolvimento da compreensão. Não se trata de um *template* rígido a ser seguido, mas sim de uma maneira diferenciada de pensar o processo de planejamento, que se inicia com o "fim" em mente, ou seja, com os resultados que desejamos alcançar em termos de aprendizagem e desenvolvimento dos aprendizes para os quais se planeja. O modelo possui três grandes etapas, que foram consideradas no processo do GT: a definição dos objetivos de aprendizagem, as estratégias avaliativas e a organização do ensino.

A primeira etapa ou estágio do planejamento reverso visa identificar os resultados que desejamos alcançar ao final do processo. Diferentemente de uma ementa tradicional, que lista os conteúdos que serão "trabalhados" pelo docente, são identificadas as aprendizagens esperadas para os estudantes. Essas aprendizagens são expressas na forma de objetivos ou expectativas que evidenciam não apenas o conteúdo a ser desenvolvido, mas também os processos cognitivos e aplicações esperadas para os estudantes. A clareza quanto aos objetivos e compreensões que se pretendem alcançar em uma disciplina ou curso é essencial pois ela guia as escolhas metodológicas de um docente.

Um aspecto central e que diferencia esse modelo daquele adotado tradicionalmente é que os objetivos são claros, específicos e dizem respeito à **aprendizagem** dos estudantes, e não ao **ensino** do docente. Isso significa que eles explicitam aspectos observáveis que cada um dos participantes deve demonstrar a fim de considerarmos que o processo de aprendizagem foi bem-sucedido. No caso do desenho de programas que visam especificamente desenvolver o conhecimento pedagógico do conteúdo, buscamos definir não apenas objetivos de aprendizagem matemáticos, mas também objetivos de aprendizagem de aspectos ligados ao ensino da matemática na educação básica, à compreensão de como crianças e adolescentes aprendem a matemática, e quais estratégias são mais apropriadas para seu ensino. Essa clareza é um passo essencial para que as ações avaliativas e de ensino sejam rigorosas e efetivamente busquem desenvolver os objetivos propostos.

O segundo estágio do planejamento reverso é a definição do processo avaliativo. Ao contrário do que normalmente ocorre, que é pensar a avaliação de maneira genérica e focada nos instrumentos (prova com questões abertas ou de seleção, pesquisas, entre outros), nesta abordagem refletimos sobre **quais instrumentos avaliativos** são adequados para verificar se os objetivos de aprendizagem estão sendo alcançados. Nem todo instrumento avaliativo consegue capturar determinados processos cognitivos ou aplicações que são esperadas. Por exemplo, se um objetivo de aprendizagem é que o licenciando possa planejar ou selecionar atividades de ensino adequadas para uma determinada etapa da educação básica, a construção de um planejamento de aula é um instrumento muito mais apropriado do que uma prova de múltipla escolha.

É importante destacar que, dentro dessa perspectiva, a avaliação é compreendida como uma evidência da aprendizagem e como um mecanismo de reflexão docente para ajuste do percurso. Se o compromisso é que todos os estudantes alcancem os objetivos de aprendizagem, a avaliação é pensada e distribuída ao longo do processo para assegurar que o processo seja monitorado e intervenções necessárias sejam feitas de modo a garantir o sucesso da aprendizagem de todos. Idealmente, o conjunto de instrumentos propostos para uma disciplina dialoga com os objetivos de aprendizagem propostos naquele contexto. Não existe instrumento que seja, *a priori*, bom ou ruim, mas sim instrumentos que sejam adequados ou inadequados para medir aquilo que se deseja.

Apenas na última etapa do processo de planejamento descrevemos as ações de ensino e planejamos as metodologias e estratégias específicas. O encadeamento e progressão das aulas deve ser pensado de tal modo que ele possa assegurar o desenvolvimento dos objetivos de aprendizagem pelos licenciandos. Assim como no caso das avaliações, a escolha metodológica e o encadeamento da exploração dos conteúdos devem responder às estratégias que melhor respondam às necessidades de aprendizagem dos licenciandos e que sejam mais potentes para que eles construam os saberes necessários. Não existe uma única estratégia que seja ideal ou que deva ser a escolha prioritária: deve-se considerar quais estratégias podem de fato favorecer o desenvolvimento da compreensão, sem perder de vista que esse é um processo a ser realizado pelos estudantes.

Os três programas expandidos de disciplina que foram elaborados pelos membros do GT seguiram esse processo. Cada um deles apresenta um recorte diferente no ensino da álgebra. Considerado o recorte do conteúdo, os membros de cada um dos grupos trabalharam conjuntamente na definição dos objetivos de aprendizagem, focando tanto em aspectos ligados ao conhecimento matemático quanto ao ensino de matemática. Tendo em vista estes objetivos, foram estabelecidos os instrumentos avaliativos. Nos programas que apresentamos nesta publicação, descrevemos em detalhe as propostas avaliativas, buscando orientar quanto à forma como os diferentes instrumentos mensuram diferentes aspectos dos objetivos traçados.

Por fim, os grupos apresentam uma proposta de organização curricular para a disciplina, com a distribuição das aulas e exemplos de como essas aulas podem desenvolver o conhecimento pedagógico do conteúdo dos licenciandos.

O grupo de trabalho espera que esses programas expandidos sejam bons pontos de partida para que docentes em cursos de licenciatura em Matemática ou outras áreas do conhecimento possam se inspirar em como trabalhar o conhecimento pedagógico do conteúdo com os futuros professores que estão formando. Longe de serem modelos a serem copiados, eles são referências para motivar o trabalho tanto na álgebra quanto em outras áreas da matemática. O que gostaríamos de ressaltar é que é possível trabalhar, simultaneamente, conteúdo no nível da graduação e aspectos do ensino, mantendo o rigor e o engajamento dos licenciandos. Nos anexos, apresentamos o modelo do CoRe adaptado e a estrutura do planejamento reverso.

Colocando os programas em prática

Antes de adentrarmos na leitura dos programas de disciplina propostos, dois aspectos centrais sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo precisam ser reforçados. O primeiro deles diz respeito à perspectiva de aprendizagem que embasa toda a discussão sobre CPC. O desenvolvimento de um conhecimento pedagógico do conteúdo docente só faz sentido dentro de um quadro de referência que rompe com a ideia de "ensino como fala e aprendizagem como escuta" (LOUGHRAN; BERRY; MULHALL, 2012).

A riqueza de recursos que o professor desenvolve ao construir o seu conhecimento pedagógico do conteúdo está a serviço de uma perspectiva de aprendizagem com compreensão e em profundidade, com o estudante construindo saberes estruturantes a partir de experiências de aprendizagem significativas e que possibilitem uma exploração conceitual profunda. Isso significa que os docentes do ensino superior precisam, eles próprios, aderir a essa noção de aprendizagem para que suas aulas sejam, elas próprias, ambientes de construção de conhecimento com compreensão pelos licenciandos.

O segundo aspecto diz respeito às experiências de aprendizagem que os licenciandos viverão na graduação. Todos os estudos recentes oriundos das ciências de aprendizagem reforçam que pessoas aprendem quando participam de atividades que permitem explorar ideias, relacioná-las a experiências pessoais, interagir com outras pessoas e receber *feedback* que promova revisão e aprofundamento (DARLING-HAMMOND *et al.*, 2025). Essa mesma lógica vale para licenciandos: desenvolver CPC exige vivenciar ambientes formativos onde se analisa prática, investiga o raciocínio do estudante e reconfigura o ensino a partir de evidências reais. Para que isso ocorra, a formação precisa oferecer experiências que aproximem o futuro professor de situações autênticas de ensino, de modo estruturado e reflexivo, algo que também ecoa nos materiais do GT quando propõem análise de tarefas, construção de mapas conceituais e discussão de grandes ideias matemáticas.

É preciso, portanto, um profundo compromisso com a aprendizagem dos licenciandos e com a aprendizagem das crianças e jovens que eles irão formar quando estiverem em sala de aula. Para isso, esperamos que as propostas possam inspirar o corpo docente das instituições formadoras a:

- Integrar teoria e prática desde o início da formação dos licenciandos, e de maneira específica nas diferentes disciplinas;
- Articular conhecimento disciplinar com conhecimento sobre aprendizagem;
- Apoiar os licenciandos no desenvolvimento de competências de análise da prática e tomada de decisão pedagógica;
- Criar ambientes formativos que representem os princípios que desejamos ver nas escolas;
- Promover, nos futuros professores, uma visão de docência comprometida com equidade, rigor intelectual e compreensão profunda dos estudantes.

A produção apresentada pelos membros do GT neste volume se insere exatamente nesse movimento. Ao elaborar programas de disciplinas para as licenciaturas em matemática à luz do CPC, esses docentes contribuem para reaproximar o ensino daquilo que sabemos sobre aprendizagem, fortalecendo a capacidade formativa das licenciaturas e ampliando as condições para que nossos futuros professores ensinem matemática com compreensão, intencionalidade e potência transformadora.

Referências

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.1177/0022487108324554. Acesso em: 2 dez. 2025.

BRUNS, B.; LUQUE, J. **Great Teachers**: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean. Washington, DC: The World Bank, 2014. Disponível em: http://www.worldbank.org/content/dam/Worldbank/document/LAC/Great_Teachers-How_to_Raise_Student_Learning-Barbara-Bruns-Advance%20Edition.pdf. Acesso em: 2 dez. 2025.

CARLSON, J. *et al*. The Refined Consensus Model of Pedagogical Content Knowledge in Science Education. *In*: HUME, A.; COOPER, R.; BOROWSKI, A. (ed.). **Repositioning pedagogical content knowledge in teachers' professional knowledge**. Singapore: Springer, 2019. p. 77-94. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-981-13-5898-2_2. Acesso em: 02 dez. 2025.

CHETTY, R.; FRIEDMAN, J. N.; ROCKOFF, J. E. Measuring the Impacts of Teachers II: Teacher Value-Added and Student Outcomes in Adulthood. **American Economic Review**, v. 104, n. 9, p. 2633–2679, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1257/aer.104.9.2633. Acesso em: 2 dez. 2025.

DARLING-HAMMOND, L. *et al*. **Design Principles for Teacher Preparation**: Enacting the Science of Learning and Development. Palo Alto, CA: Learning Policy Institute, 2025. Disponível em: https://learningpolicyinstitute.org/product/sold-design-principles-teacher-preparation-report. Acesso em: 2 dez. 2025.

GATTI, B. A. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 31, n. 113, p. 1355–1379, 2010. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0101-73302010000400016. Acesso em: 2 dez. 2025.

GROSSMAN, P.; SCHOENFELD, A.; LEE, C. Teaching subject matter. In: DARLING-HAMMOND, L.; BRANSFORD, J. (eds.). **Preparing Teachers for a Changing World**: What Teachers Should Learn and Be Able to Do. San Francisco: Jossey-Bass, 2005. p. 201-231.

HANUSHEK, E. A. The economic value of higher teacher quality. **Economics of Education Review**, v. 30, n. 3, p. 466–479, 2011. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.econedurev.2010.12.006. Acesso em: 2 dez. 2025.

HANUSHEK, E. A.; RIVKIN, S. G. Generalizations about using value-added measures of teacher quality. **American Economic Review**, v. 100, n. 2, p. 267–271, 2010. Disponível em: https://doi.org/10.1257/aer.100.2.267. Acesso em: 2 dez. 2025.

KENNEDY, M. M. The Role of Pre-Service Teacher Education. In: DARLING-HAMMOND, L.; SYKES, G. (eds.). **Teaching as the Learning Profession**: Handbook of Policy and Practice. San Francisco: Jossey-Bass, 1999. p. 54–85.

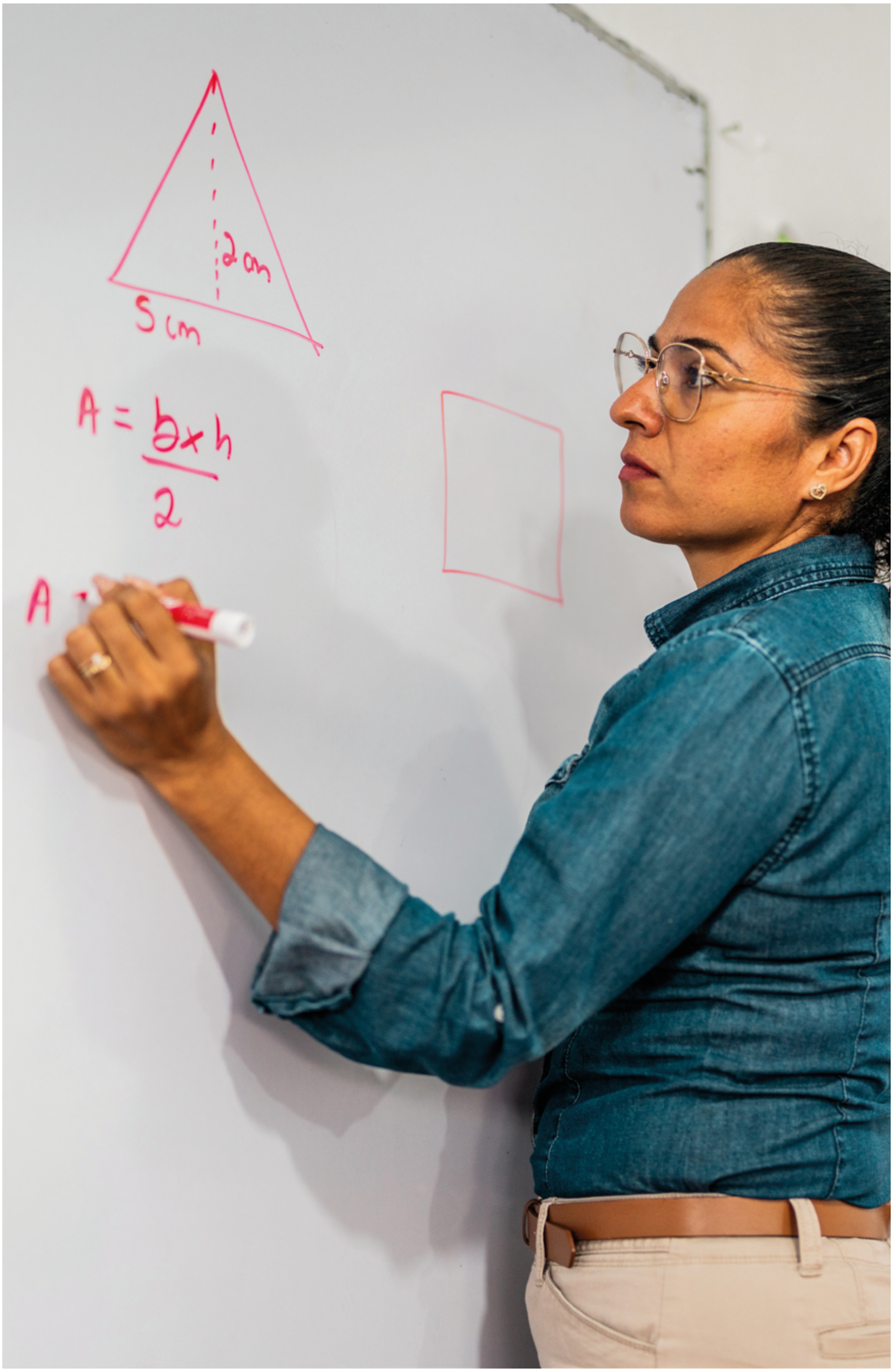
LAMPERT, M. Learning Teaching in, from, and for Practice: What Do We Mean? **Journal of Teacher Education**, v. 61, n. 1–2, p. 21–34, 2010. Disponível em: https://doi.org/10.1177/0022487109347321. Acesso em: 2 dez. 2025.

LOUGHRAN, J.; BERRY, A.; MULHALL, P. **Understanding and developing science teachers' pedagogical content knowledge**. 2. ed. Rotterdam: Sense Publishers, 2012.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986. Disponível em: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004. Acesso em: 2 dez. 2025.

SHULMAN, L. S. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1–22, 1987. Disponível em: https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411. Acesso em: 2 dez. 2025.

WIGGINS, G. P.; MCTIGHE, J. **Understanding by design**. 2. ed. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development, 2005.


2 cm
5 cm
A = b x h
2
A

FUNDAMENTOS DA PRÉ-ÁLGEBRA

na formação de Professores de Matemática

Cristiane Chica[1], Marcelo Firer[2], Silmara Louise da Silva[3], Cleberson de Lima Mendes[4]

INFORMAÇÕES GERAIS DA DISCIPLINA

Semestre estimado de curso:
1º semestre (início da graduação)

Carga horária prevista:
30 horas

Número de semanas previstas:
15 semanas

Duração das aulas:
2 horas semanais

[1] Lattes: http://lattes.cnpq.br/5407386021052254
[2] Lattes: http://lattes.cnpq.br/9387981804093711
[3] Lattes: http://lattes.cnpq.br/0084128003025003
[4] Lattes: http://lattes.cnpq.br/2726625129110215

O CPC no programa “Fundamentos da Pré-Álgebra”

Bárbara Born

O primeiro programa de disciplina apresentado neste material tem como foco a transição entre aritmética e álgebra, destacando as propriedades operatórias como fundamentos para a generalização algébrica. Embora os conteúdos matemáticos no centro deste programa não sejam, por si mesmos, desafiadores para um estudante de graduação, a abordagem proposta os torna essenciais na formação de um futuro professor.

O estudo da aritmética em seu processo de transição para a álgebra, tal como proposto nesta disciplina, concentra o olhar no processo de construção desses saberes pelos estudantes da educação básica. Um licenciando em matemática que atuará nos anos finais do Ensino Fundamental precisa conhecer o desenvolvimento do pensamento matemático de seus estudantes, a fim de promover uma aprendizagem coerente e efetiva. Além disso, como os conhecimentos explorados neste curso geralmente são aprendidos de forma elementar no processo de escolarização básica dos próprios licenciandos, eles tendem a carecer de um entendimento mais aprofundado sobre sua “estrutura, justificativas e potencial para generalizações algébricas”, conforme destacam os autores do programa.

É particularmente interessante, neste programa, a maneira como as atividades avaliativas mobilizam simultaneamente o conhecimento matemático e desenvolvem o conhecimento pedagógico do conteúdo dos futuros professores. A disciplina proposta explora, do ponto de vista do CPC, a centralidade da tarefa de aprendizagem no processo de construção do conhecimento dos estudantes da educação básica.

Dois aspectos do CPC merecem destaque na leitura deste programa. O primeiro diz respeito à exploração efetiva do conhecimento matemático realizada por meio do desenvolvimento da capacidade do futuro professor de elaborar tarefas para seus estudantes. Desenhar atividades de aprendizagem que apliquem conceitos matemáticos mobiliza o conteúdo na medida em que o licenciando precisa ter clareza conceitual e precisão procedimental para que as atividades sejam coerentes, além de compreender o público-alvo para adequar a estratégia e o nível de dificuldade das tarefas.

Outro aspecto explorado pelo programa é a possibilidade de analisar tarefas de estudantes. Esse tipo de atividade é particularmente importante para o desenvolvimento do repertório de compreensões e incompreensões comuns, bem como para o refinamento do olhar profissional do professor em sua prática cotidiana.

Neste programa, além de uma descrição da organização da disciplina em unidades de ensino, você encontrará exemplos da organização de algumas aulas. Atente para como a proposta incorpora o trabalho com as dimensões do conhecimento especializado do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo. Ao leitor, sugerimos um olhar atento à natureza das atividades previstas, pois elas podem inspirar o desenho de programas em outras disciplinas do curso de licenciatura em matemática.

Descrição da disciplina

Esta disciplina tem como foco o estudo da pré-álgebra como campo fundamental na formação do pensamento algébrico, com ênfase no papel do professor dos anos iniciais na mediação desse processo. Parte-se do pressuposto de que os licenciandos em Matemática dominam os procedimentos aritméticos básicos, mas carecem de uma maior clareza conceitual sobre esses conteúdos — especialmente no que diz respeito à sua estrutura, justificativas e potencial para generalizações algébricas. A disciplina busca desenvolver a inteligibilidade matemática dos conceitos elementares, promovendo o olhar docente sobre a aritmética como campo propício à transição para a álgebra.

A disciplina inclui tópicos que fazem referência a conteúdos matemáticos específicos, dentre os quais: sistema decimal posicional; composição e decomposição; adição e subtração; multiplicação e divisão (estratégias de cálculo); algoritmos intermediários e propriedades comutativa, associativa e distributiva; números inteiros e sinais; ordem das operações e parênteses; padrões e generalizações; refutação de padrões (contraexemplos); frações; proporcionalidade; equações, igualdade e equivalência. Os conteúdos matemáticos em si não devem representar dificuldades significativas para futuros professores de matemática. Tais temas permeiam o curso e servem como fio condutor para discutir a pré-álgebra, entendida nessa disciplina como um modo de pensar abstrato que começa a se desenvolver a partir deles.

Objetivos da disciplina

Ao final da disciplina, o licenciando deverá ser capaz de:

1. Compreender os fundamentos conceituais e curriculares da pré-álgebra

- Entender o que caracteriza a pré-álgebra e como ela se insere no currículo dos anos iniciais do ensino fundamental.
- Identificar a transição entre aritmética e álgebra como um processo gradual de generalização de propriedades e relações numéricas.
- Compreender a relevância da pré-álgebra no desenvolvimento do pensamento algébrico, especialmente na distinção entre operar com números e operar com relações.

2. Desenvolver uma compreensão profunda de conceitos e habilidades matemáticas essenciais à pré-álgebra

- Compreender e ser capaz de explicitar o funcionamento dos algoritmos aritméticos, indo além da execução de procedimentos.
- Entender o sinal de igualdade como uma relação de equivalência, superando a visão operacional (como "resposta") e explorando seu uso em equações e generalizações.
- Compreender e aplicar as propriedades fundamentais das operações (comutatividade, associatividade, distributividade) como base para a manipulação algébrica.
- Identificar e explorar padrões numéricos e funcionais, articulando-os com a ideia de variável e generalização.
- Reconhecer a função dos parênteses e a hierarquia das operações como recursos essenciais para a estruturação de expressões numéricas e algébricas.

3. Desenvolver práticas pedagógicas para o ensino de conteúdos pré-algébricos

- Analisar produções de estudantes em atividades envolvendo igualdade, propriedades das operações e padrões.
- Reconhecer estratégias corretas e compreender erros como expressão de raciocínios em desenvolvimento.
- Propor e conduzir discussões matemáticas que promovam a explicitação de raciocínios, a comparação de estratégias e a reflexão sobre diferentes formas de representar e resolver problemas.
- Selecionar e adaptar tarefas que envolvam, por exemplo:
    - Generalizações baseadas em cálculos aritméticos (exemplo: se 7 + 5 = 12, então 70 + 50 = __).
    - Análise de igualdade (exemplo: julgar a veracidade de expressões como 4 + 3 = 3 + 4 ou 3 + 4 = 7 = 2 + 5).
    - Uso de letras como variáveis ou incógnitas em situações simples (exemplo: a + 3 = 10).
    - Exploração de padrões numéricos e regras de formação (exemplo: sequências do tipo 2, 4, 6, 8,...).

4. Ampliar e qualificar o repertório de recursos didáticos e estratégias de ensino de pré-álgebra

- Produzir e utilizar materiais didáticos que favoreçam o raciocínio algébrico a partir de situações concretas ou manipulativas, como:
    - Blocos multibase, quadros de valor posicional, fichas de agrupamento e decomposição.
    - Tabelas de padrões e jogos que envolvam relações entre números.
- Explorar as representações diversas (numérica, verbal, algébrica, geométrica e pictórica) dos conceitos de aritmética como base para a introdução de variáveis e expressões.
- Desenvolver sequências didáticas que promovam a passagem progressiva da aritmética para a álgebra, alinhadas ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes e às orientações curriculares nacionais.

IMPORTANTE

A disciplina aborda a pré-álgebra através de conteúdos matemáticos específicos, que servem como **fio condutor** para desenvolver um **modo de pensar abstrato** essencialmente algébrico.

Tópicos abordados:

- **Estrutura numérica e operacional: sistema decimal posicional (composição e decomposição); adição, subtração, multiplicação e divisão (incluindo estratégias de cálculo, algoritmos intermediários e propriedades: comutativa, associativa e distributiva); ordem das operações e uso de parênteses.**
- **Fundamentos da álgebra: padrões e generalizações; refutação de padrões (contraexemplos); raciocínio proporcional, igualdade e equivalência.**

Embora os procedimentos aritméticos não representem um desafio para os licenciandos, a disciplina foca em sua **estrutura, justificativa e potencial para generalizações**, favorecendo o olhar docente sobre a transição da aritmética para a álgebra.

Metodologia de avaliação (trabalhos e prova)

A avaliação será composta por **trabalhos em grupo** e **uma prova individual**.

A. Organização dos trabalhos em grupo

- **Formato dos grupos:** Grupos pequenos (sugerido: até 4 estudantes para uma turma de até 32 alunos).
- **Temas:** Cada grupo escolherá um dos tópicos matemáticos listados anteriormente (exemplos: “raciocínio proporcional” ou “padrões e generalização”).
- **Desenvolvimento longitudinal:** O tema escolhido será o foco de todos os trabalhos do grupo, desenvolvendo-o de forma aprofundada ao longo do semestre. Por exemplo, se o Grupo A lidar com “raciocínio proporcional”, elaborará listas de exercícios (Atividade 1) especificamente sobre esse tópico.
- **Apresentação:** O repertório desenvolvido por cada grupo será compartilhado com a turma nas apresentações de trabalhos.

Estrutura e sequência dos trabalhos (4 atividades)

Os grupos desenvolverão **quatro trabalhos**, sendo os três primeiros focados em um tipo diferente de atividade e de conhecimento pedagógico de conteúdo (CPC). O quarto trabalho integrará os demais:

Trabalho	Foco	Propósito
Trabalhos 1, 2 e 3	Tópico escolhido + tipo de atividade e CPC diferentes	Explorar aspectos distintos do CPC para ampliar a compreensão dos temas.
Trabalho 4 (final)	Plano de aula ou sequência didática	Integrar todos os aspectos pedagógicos e de conteúdo trabalhados nos três primeiros.

Apresentação dos trabalhos (sugestão de cronograma para 8 grupos)

Ao longo do semestre, cada grupo aprofundará um tópico específico. Sua aprendizagem será compartilhada com a turma através das apresentações dos trabalhos. Para essas atividades, há uma previsão ampla de tempo, podendo ocupar até um terço das aulas.

Evento	Formato	Duração Estimada
Apresentação do Trabalho 1 "Seminário 1"	Breve apresentação seguida de discussão plenária.	1 aula dupla (10 minutos por grupo)
Apresentação dos Trabalhos 2 e 3 "Seminário 2"	Apresentação detalhada e discussão com a turma.	2 aulas duplas (25 a 30 minutos por grupo, distribuídos ao longo das aulas)
Apresentação final (Trabalho 4) "Seminário final"	Apresentação e discussão dos planos de aula/sequência didática.	2 aulas duplas

Matriz de referência (opcional)

Para facilitar a elaboração e avaliação dos trabalhos (especialmente se houver alteração nas propostas), sugere-se o uso de uma matriz que cruza o **conhecimento pedagógico de conteúdo (CPC)** com as **tarefas características do cotidiano docente**. A descrição da matriz está apresentada nas tabelas a seguir.

Coisas que o professor precisa conhecer **Categorias de CPC (adaptado de Chick *et al*, 2006)**	
Categoria do CPC	**Evidência quando o professor...**
CPC claramente explícito	
Estratégias de ensino – específica (explicitamente relacionadas à matemática)	Discute ou usa estratégias ou abordagens específicas para ensinar um determinado conceito ou habilidade matemática.
Pensamento do aluno – geral (exclui *misconceptions*)	Discute ou responde a possíveis modos de pensar dos alunos sobre um conceito, ou reconhece níveis típicos de compreensão, incluindo *misconceptions* comuns e prováveis sobre um conceito.
Representações apropriadas e detalhadas de conceitos	Descreve ou demonstra maneiras de modelar ou ilustrar um conceito (pode incluir materiais ou diagramas).
Conhecimento de recursos	Discute e utiliza recursos disponíveis para apoiar o ensino.
Conhecimento do propósito do conteúdo	Discute as razões para um determinado conteúdo ser incluído no currículo ou como ele pode ser utilizado. Discute como os tópicos se encaixam no currículo.
Conhecimento do conteúdo em um contexto pedagógico	
Compreensão profunda do conteúdo matemático fundamental	Exibe profundidade e compreensão conceitual aprofundada de aspectos identificados da matemática. Estabelece conexões entre conceitos e tópicos, incluindo a interdependência dos conceitos.
Decomposição do conteúdo em componentes-chave	Identifica componentes conceituais e críticos dentro de um conceito que são fundamentais para a compreensão e aplicação desse conceito. Identifica aspectos da tarefa que afetam sua complexidade.
Métodos de solução	Demonstra um método para resolver um problema matemático.

Coisas que o professor precisa conhecer **Categorias de CPC (adaptado de Chick *et al*, 2006)**	
Categoria do CPC	**Evidência quando o professor...**
Conhecimento pedagógico em um contexto de conteúdo	
Metas de aprendizagem – específicas da matemática	Descreve um objetivo para a aprendizagem dos alunos diretamente relacionado a conteúdos matemáticos específicos.
Metas de aprendizagem – geral	Descreve um objetivo para a aprendizagem dos alunos não diretamente relacionado ao conteúdo.
Engajamento e manutenção do foco do aluno	Discute estratégias para engajar os alunos.
Técnicas de sala de aula	Discute práticas genéricas de sala de aula.

Coisas que o professor de matemática precisa fazer **Ações características da atividade rotineira de um professor de matemática**	
Escolher exemplos	Exemplos e contraexemplos para disparar a discussão e conduzir a algum resultado ou exemplos para ilustrar algum resultado ou conceito.
Elaborar listas de exercícios e de problemas	Exercícios e problemas em intensidade adequada, com dificuldade crescente.
Escolher problemas disparadores	Problemas de “piso baixo e teto alto”, ou seja, a proposta é acessível a todos, permitindo avançar até generalizações complexas.
Preparar atividades expositivas	As atividades expositivas incluem discussões em sala de aula, uso planejado de lousa, escolha de representações adequadas.
Corrigir e compreender produções de alunos	Foco nas produções escritas dos alunos, em seus exercícios, lição de casa, avaliações, entre outros. Ser capaz de dar um *feedback* que o leve a aprimorar e avançar na aprendizagem.
Preparar avaliações por meio de provas	Como construir uma boa prova, como corrigir provas (provas são, na prática, inescapáveis na realidade escolar).

Continua...

Atividades avaliativas		Prazos de entrega
Atividade 1	Trabalho em grupo: elaboração de lista de exercícios com auxílio de IA	Aula 5
Atividade 2 e 3	Trabalhos em grupo: interpretar produções e erros de alunos; elaboração de problema disparador	Aula 10
Atividade 4	Trabalho em grupo: elaboração de plano de aula ou sequência didática	Aulas 14 e 15
Atividade 5	Prova individual	Aula 16

IMPORTANTE

As quatro primeiras atividades avaliativas são trabalhos em grupo, que incluem duas entregas: um texto e uma apresentação a ser feita para a sala com apoio de *slides*.

Na medida do possível, é desejável que o docente da disciplina possa dar um retorno aos alunos sobre o texto e os *slides* antes da apresentação para que os alunos possam melhorar a explanação e a discussão.

Todas as entregas devem ser avaliadas considerando tanto os textos como a apresentação e o debate que ela consiga despertar. Um aspecto importante a ser destacado nas devolutivas é a exigência de que os argumentos utilizados sejam específicos, façam referências a objetos e situações concretas.

Referência

CHICK, H. L.; et al. Aspects of teachers' pedagogical content knowledge for decimals. **Proceedings of the 30th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 2, p. 297-304, 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Stefan-Zehetmeier/publication/369762065_Lasting_effects_of_a_professional_development_initiative/links/642bb77c4e83cd0e2f8c5df3/Lasting-effects-of-a-professional-development-initiative.pdf. Acesso em: 29 nov. 2025.

Atividade 1 - Inteligência artificial (IA) e lista de exercícios (em duplas ou pequenos grupos)

A tarefa terá 5 etapas:

Etapa 1

Elaborar uma lista composta por 16 exercícios no formato A_ = C ou AB =_ . A lista deverá ser organizada em ordem crescente de dificuldade, adequada para estudantes do 5º ou 6º ano do ensino fundamental ou com foco em recomposição de aprendizagens para turmas do 7º ao 9º ano do ensino fundamental.

Etapa 2

Com base na lista produzida na etapa anterior, produzir uma lista de situações-problema que possam ser modeladas pelos exercícios propostos. As situações-problema devem ser muito curtas e utilizar o mesmo contexto — por exemplo, dinheiro — embora as formulações possam variar.

Etapa 3

Reescrever a lista da etapa anterior utilizando contextos variados, interessantes e acessíveis aos estudantes, mantendo a correspondência com os exercícios originais.

Etapa 4

Resolver os 16 exercícios elaborados e registrar as respostas de forma manuscrita, distribuídas em duas páginas: a primeira deve conter as soluções dos exercícios 1 a 8, e a segunda, as dos exercícios 9 a 16. O primeiro bloco será utilizado para ensinar à IA como corrigir os problemas e fornecer *feedback* aos estudantes.

Etapa 5

Após verificar que o processo de correção está satisfatório, utilizar a IA para corrigir os 8 exercícios restantes.

Critérios de avaliação sugeridos:

Etapa 1: Elaboração da lista e critérios de dificuldade (25 pontos)

Critério	Pontuação	Descrição
I. Conformidade e adequação ao nível	5	Foram elaborados 16 exercícios nos formatos exigidos, matematicamente corretos e com números adequados para 5º e 6º ano.
II. Ordem crescente de dificuldade	5	A progressão de dificuldade é clara e visível na sequência dos 16 exercícios.
III. Explicitação dos critérios de dificuldade	15	Os critérios utilizados para definir a dificuldade e a ordem dos exercícios foram claramente listados e explicitados (exemplos: tipo de operação, tamanho dos números, posição da incógnita). A justificativa para a ordem escolhida é coerente com os critérios listados.

Etapa 2: Criação de situações-problema com contexto único (15 pontos)

Critério	Pontuação	Descrição
IV. Correspondência e clareza da modelagem	10	Cada um dos 16 problemas corresponde fielmente ao modelo matemático do exercício da Etapa 1. A formulação é concisa e breve.
V. Consistência e variação na formulação	5	O contexto único é mantido em todos os problemas. Há variação nas frases e perguntas para evitar a repetição monótona.

Etapa 3: Criação de situações-problema com contextos variados (30 pontos)

Critério	Pontuação	Descrição
VI. Correspondência e acessibilidade	5	A correspondência entre o novo problema e o modelo matemático original é mantida. Os contextos são acessíveis à faixa etária.
VII. Variação e riqueza de contextos	10	São utilizados múltiplos contextos distintos, demonstrando repertório e criatividade na transposição didática.
VIII. Justificativa da escolha dos contextos	15	O grupo justificou claramente a escolha de cada contexto (ou grupo de contextos). A justificativa deve ter base pedagógica (exemplos: relevância cultural, interesse do aluno, facilidade de visualização/concretização, conexão interdisciplinar). Deve ser dada ênfase à escolha de nomes e personagens que contemplem variabilidade de gênero e pertinência social.

Etapas 4 e 5: Resolução, treinamento da IA e análise crítica (30 pontos)

Critério	Pontuação	Descrição
IX. Resolução e formato	5	A resolução dos 16 exercícios está correta e coerente, apresentada em formato manuscrito, seguindo o *layout* de duas páginas (8 em cada).
X. Explicitação dos critérios de correção da IA	10	O grupo explicitou e detalhou os critérios de correção e as regras de *feedback* ensinadas à IA para os 8 primeiros exercícios. Os critérios devem ser claros (exemplo: solução correta, apresentação do método, erro de cálculo). O *feedback* deve ser construtivo e pedagógico.
XI. Análise crítica da IA	15	O grupo avaliou (Etapa 5) a acurácia da correção da IA nos 8 exercícios restantes e a pertinência do *feedback* gerado. A análise deve ser crítica e fundamentada, identificando pontos fortes e limitações da ferramenta para uso pedagógico.

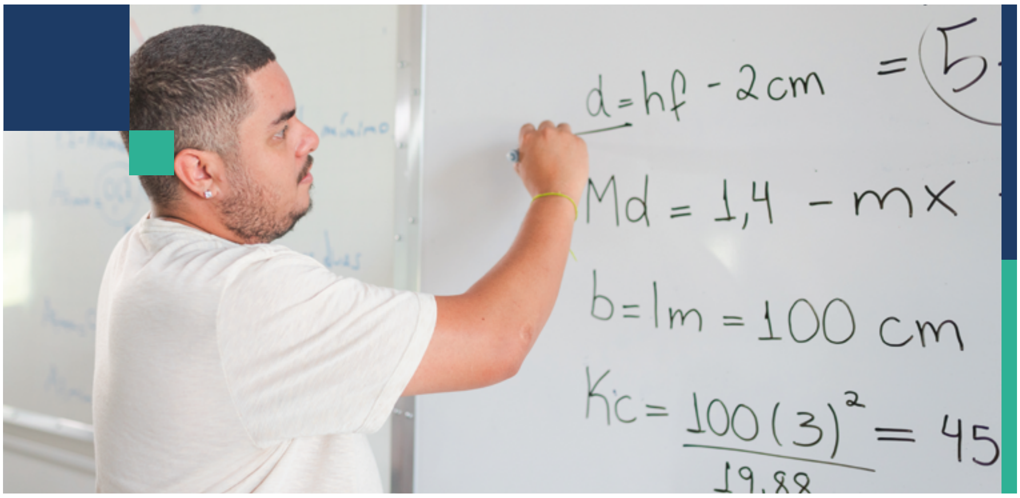
Atividade 2 - Interpretar produções e erros de alunos (em duplas ou pequenos grupos)

A atividade será realizada em **duas etapas principais**, culminando com a entrega do documento e a apresentação oral.

Etapa 1: Interpretação e diagnóstico de erros (o "porquê" do erro)

Objetivo: Analisar as produções de alunos do ensino fundamental (5º ou 6º ano) e ir além da simples identificação do erro, buscando as hipóteses conceituais que o geraram.

- **Recepção do material:** O grupo receberá um conjunto de produções escritas de alunos (resoluções de problemas envolvendo o valor desconhecido, expressões de igualdade, entre outros).
- **Análise individual e coletiva:** Para cada produção que contenha erros ou estratégias inesperadas, o grupo deve:
    - **Identificar o erro:** O que foi feito de errado ou diferente?
    - **Levantar cenários plausíveis (múltiplas interpretações):** Formule pelo menos dois cenários com hipóteses distintas que expliquem o raciocínio do aluno. O que ele pensava que estava fazendo? (exemplo: "Ele pensa que o sinal de igual significa 'o resultado é' ou 'faça a conta' – Cenário 1" versus "Ele trocou a operação inversa, subtraindo em vez de dividindo – Cenário 2").
    - **Fundamentação:** Justifique suas hipóteses com base em sua experiência de estágio, leituras na literatura de Educação Matemática ou exemplos de misconceptions comuns (como as sugeridas na Seção 2 a seguir).



Etapa 2: Proposta de devolutiva e intervenção ("como" corrigir o conceito)

Objetivo: Elaborar intervenções pedagógicas específicas, coerentes com o diagnóstico feito na Etapa 1.

- **Elaboração da devolutiva:** Para cada cenário plausível levantado na Etapa 1, o grupo deve sugerir uma devolutiva específica que o professor daria ao aluno.
- **Especificidade e coerência:** A devolutiva deve ser uma ação pedagógica (uma pergunta, uma atividade, um novo exemplo com material concreto, um debate) que busque confrontar o mal-entendido conceitual daquele cenário (e não apenas punir ou mandar refazer).
- **Variedade:** Sugira diferentes formatos (exemplo: feedback escrito no trabalho, intervenção oral individual, atividade de recuperação em pequeno grupo).

Etapa final: Entrega e apresentação

- **Documento escrito (dois terços da nota):** Entregar a análise completa, organizada, com a exploração dos cenários e as propostas de devolutiva justificadas.
- **Apresentação oral (um terço da nota):** Apresentar a análise para a turma, focando nas produções mais ricas em erros e nas múltiplas interpretações.

A avaliação focará na clareza da exposição e no domínio do conteúdo (capacidade de responder a perguntas e debater).

Processo de avaliação sugerido

- **Revisão do material de análise:** O professor fornece as produções dos alunos, garantindo que sejam ricas e permitam múltiplas interpretações.
- **Entrega do documento escrito:** Os grupos entregam o documento detalhado, com foco na exploração de múltiplas interpretações plausíveis e na intervenção específica para cada cenário.
- **Apresentação oral:** Os grupos apresentam sua análise à turma, destacando os erros mais complexos e as propostas de intervenção.
- **Aplicação da rubrica (150 pontos):** O professor utiliza a rubrica para avaliar o documento (100 pontos) e a apresentação (50 pontos).

Rubrica de avaliação detalhada (150 pontos)

Parte A: Documento escrito (dois terços da nota – 100 pontos)

O foco é a profundidade e a coerência da análise escrita.

A.1. Interpretação e plausibilidade dos cenários (50 pontos)

Critério	Pontos	Descrição e nível de desempenho
A.1.1. Exploração de múltiplas interpretações	25	Identifica e desenvolve no mínimo interpretações/cenários plausíveis e distintos para cada produção do aluno. A análise vai além do erro de cálculo e diagnostica diferentes raízes conceituais ou procedimentais. Para atingir 25 pontos, deve oferecer mais de uma interpretação plausível quando pertinente.
A.1.2. Profundidade da análise conceitual	15	As interpretações diagnosticam a origem da dificuldade (exemplos: dificuldade na transposição de linguagem, falha em reconhecer a equivalência no sinal de igual, erro sistemático de aplicação de regra), demonstrando alto CPC.
A.1.3. Uso de fontes e experiência	10	As hipóteses diagnósticas são fundamentadas com base na experiência de estágio, na literatura profissional ou em erros comuns documentados.

A.2. Sugestão de devolutiva (50 pontos)

Critério	Pontos	Descrição e nível de desempenho
A.2.1. Pertinência da devolutiva (coerência diagnóstico-intervenção)	25	Proposta de intervenção altamente pertinente e diferenciada para cada um dos cenários plausíveis diagnosticados. A intervenção é direcionada para confrontar o mal-entendido conceitual daquele cenário específico.
A.2.2. Especificidade e ação pedagógica	15	A devolutiva é específica e acionável, indicando o **quê** (material, pergunta-chave), o **como** (o método) e o **porquê** (o objetivo conceitual da intervenção), evitando sugestões genéricas.
A.2.3. Variedade e clareza das opções	10	O grupo sugere diferentes formas de devolutiva (escrita, individual, em grupo) e a apresentação da análise é clara e organizada no documento.

Parte B: Apresentação oral (um terço da nota – 50 pontos)

O foco é a comunicação e o domínio do conteúdo diagnóstico.

Critério	Pontos	Descrição e nível de desempenho
B.1. Clareza e estrutura da apresentação	20	A apresentação possui um fluxo lógico, com início, meio e fim bem definidos. A análise é comunicada de forma clara e didática para a audiência (colegas e professor), e o material visual é profissional e adequado.
B.2. Domínio e fluência na exposição	15	Os membros do grupo demonstram domínio total sobre o material analisado, não se limitando a ler os *slides*. A fala é fluente, o vocabulário pedagógico é apropriado e o tempo é gerenciado eficientemente.
B.3. Engajamento e resposta a questionamentos	15	O grupo demonstra capacidade de defender as interpretações e propostas de devolutiva sob questionamento. Consegue estabelecer conexões com outros conceitos ou teorias pedagógicas durante o debate. O grupo todo participa da exposição.

A.3. Critérios a compartilhar com os alunos

Comunique a pontuação máxima definida e os critérios abaixo de forma objetiva:

Critérios de sucesso para a atividade (pontuação máxima de X pontos)

Componente	Critério principal de avaliação	Peso na nota final
Documento escrito (análise)	**Plausibilidade de múltiplas interpretações:** Ser capaz de formular cenários plausíveis para o raciocínio do aluno, eventualmente mais de um raciocínio quando pertinente (25 pontos). Referências bibliográficas ou experiências profissionais que fundamentam as respostas devem ser citadas.	~ 33%
Documento escrito (devolutiva)	**Pertinência e especificidade:** Propor uma intervenção pedagógica específica e diferente para cada um dos cenários diagnosticados. A intervenção deve ser uma ação prática e justificada (25 pontos).	~ 33%
Apresentação oral	**Domínio e clareza:** Apresentar a análise e as intervenções de forma clara, estruturada e com fluência, demonstrando domínio do conhecimento pedagógico de conteúdo (CPC) e defendendo as escolhas sob questionamento (50 pontos).	~ 33%

Atividade 3 - Elaboração de problema disparador (em duplas ou pequenos grupos)

Cada grupo deve elaborar um problema disparador para ser enfrentado pelos alunos, que os encaminhe para a introdução de algum conceito ou resultado novo. O problema deve permitir abordagens diversas, seguindo a lógica de "piso baixo e teto alto". O professor deve ser capaz de antecipar as possíveis estratégias de solução e planejar o encadeamento adequado destas abordagens para discuti-las com a turma. Ao final, os alunos devem estar preparados para compreender um conceito ou resultado novo.

A entrega do grupo não deve se limitar ao enunciado do problema; ela deve constituir um **Plano de Atividade Completo** que demonstre a análise *a priori* e o planejamento da discussão em sala.

A proposta do grupo deve ser entregue em formato estruturado, contendo os seguintes itens:

I. Introdução e definição do conceito (o quê)

Conceito ou resultado novo a ser introduzido: Nomeie e defina claramente o conceito ou resultado matemático da aritmética que será o foco da aula (exemplos: algoritmo de adição com reagrupamento, conceito de razão, propriedade distributiva na multiplicação).

Público-alvo: Defina o ano escolar do ensino fundamental (1º ao 5º ano) para o qual o problema é destinado.

II. O problema disparador (a tarefa)

Enunciado final do problema: Apresente o texto do problema em sua versão final, com clareza linguística e adequação ao público-alvo. O problema deve ser concebido para forçar os alunos a utilizarem métodos ainda não formalizados, encaminhando-os para o conceito definido no item I.

III. Análise *a priori*

Antecipação das estratégias de resolução (diversidade e profundidade): Liste e descreva em detalhes as possíveis estratégias de solução que os alunos podem adotar. Esta seção deve demonstrar o "piso baixo" (soluções mais elementares, concretas ou intuitivas) e o "teto alto" (soluções mais sofisticadas, abstratas ou que levem à generalização).

Antecipação de erros e dificuldades: Antecipe as principais dificuldades, os raciocínios incorretos ou os “erros” mais prováveis que podem surgir durante a resolução, explicando por que o aluno pode chegar a essas conclusões (demonstração de conhecimento do conteúdo e dos alunos).

IV. Plano de mediação e formalização

Encadeamento das abordagens e discussão em sala: Descreva o plano do professor para discussão após a resolução. Indique a ordem estratégica para apresentar as soluções dos alunos no quadro (do mais intuitivo ao mais formal/avançado) e como o professor faria a mediação entre elas para, finalmente, formalizar e introduzir o conceito novo definido no item I.

Materiais e recursos: Sugira brevemente que materiais manipuláveis ou recursos visuais seriam úteis para apoiar a resolução ou a discussão.

Rubricas para avaliação (10 pontos)

A nota final da atividade será de **10 pontos**, com a distribuição equilibrada de **2 pontos** para cada um dos cinco critérios.

Critério avaliativo	4. Excelente (9-10 pontos)	3. Bom (7-8 pontos)	2. Satisfatório (5-6 pontos)	1. Insatisfatório (abaixo de 5 pontos)
1. Consistência problema/conceito (2 pontos)	O problema é perfeitamente articulado e claramente encaminha os alunos para a necessidade do conceito a ser introduzido.	O problema é relevante e introduz o conceito, mas a ligação com o resultado novo poderia ser mais direta.	O problema aborda o conteúdo, mas não força claramente a introdução do conceito novo; a solução pode ser dada por métodos antigos.	O problema não se relaciona com o conceito/resultado novo ou é ambíguo.
2. Diversidade de estratégias antecipadas (CPC) (2 pontos)	O grupo antecipa e descreve de forma rica e detalhada quatro ou mais estratégias (incluindo erros), justificando o raciocínio de cada uma.	O grupo antecipa e descreve três estratégias distintas, incluindo a distinção entre acerto e erro, com boa justificativa.	O grupo antecipa duas estratégias, mas as descrições são superficiais ou não incluem uma análise de erro.	Apenas uma ou nenhuma estratégia é antecipada, ou a análise é vaga e incorreta.
3. Piso baixo e teto alto (2 pontos)	O problema claramente oferece soluções acessíveis (piso baixo) e desafios/generalizações para alunos avançados (teto alto).	O problema possui um piso baixo nítido, mas o teto alto é implícito ou não é tão desafiador.	O problema atende a um nível de conhecimento mediano, mas falha em incluir piso baixo e teto alto de forma clara.	O problema é muito fechado ou muito difícil, não sendo adequado para diferentes níveis de conhecimento.
4. Clareza do plano e encaminhamento (2 pontos)	O plano de mediação é lógico, coerente e descreve o encadeamento das soluções de forma didática, culminando na formalização clara do conceito. O texto é impecável.	O plano de mediação está presente e é funcional, mas o encadeamento das soluções (a ordem da discussão) carece de justificativa detalhada.	O plano de mediação é superficial ou o passo de formalização do conceito novo não está claramente detalhado após a discussão.	Não há plano de mediação ou o plano é confuso e inviável para a prática docente.
5. Criatividade e originalidade (2 pontos)	O problema é altamente original, fugindo de clichês. Integra de forma elegante valores estéticos da matemática (exemplos: simetria, padrões) e apresenta forte coerência social/cultural, motivando profundamente.	O problema demonstra criatividade e é inovador. Apresenta um toque estético ou uma clara relevância social, mas a integração dos dois aspectos poderia ser mais profunda.	O problema é funcional e claro, mas a originalidade é limitada. O contexto é socialmente coerente, mas não explora valores estéticos da matemática de forma perceptível.	O problema é genérico ou uma adaptação direta de exemplos didáticos. Não apresenta originalidade nem explora valores estéticos; o contexto social é trivial ou irrelevante.

Atividade 4 - Elaboração de plano de aula ou sequência didática (em duplas ou pequenos grupos)

Esta atividade é o culminar do curso, exigindo que os grupos demonstrem a capacidade de integrar os conhecimentos de CPC desenvolvidos nas avaliações anteriores. O desafio é criar um plano coeso, em que o problema disparador (Atividade 3) seja o ponto de partida e a lista de exercícios (Atividade 1) seja estrategicamente incorporada.

A entrega deve ser um documento formal de planejamento de aula ou sequência didática, detalhando a transposição do conhecimento em uma proposta de intervenção pedagógica prática, seguindo os itens da tabela:

Item de entrega	Conteúdo e requisitos	Atividade prévia relevante
I. Tema e conceito central	Definição do conceito de aritmética e do ano escolar (1º ao 5º ano) alinhados ao problema disparador.	Atividade 3
II. Objetivos de aprendizagem	Objetivos gerais e específicos que o aluno deve atingir ao final da aula.	
III. Diagnóstico pré-aula	Apresentar um ou dois itens de diagnóstico e explicar o que as respostas revelariam e por que isso justifica a abordagem planejada.	Atividades 1 e 2
IV. O problema disparador	Incluir o enunciado do problema disparador e sua análise a *priori* (estratégias, piso baixo/teto alto). O plano deve se iniciar obrigatoriamente com a apresentação deste problema.	Atividade 3
V. Desenvolvimento da aula (passo a passo)	Descrição detalhada das etapas (com tempo estimado para cada): 1. Resolução do problema disparador (individual/grupos); 2. Mediação e encadeamento das abordagens; 3. Formalização do conceito; 4. Momento de consolidação/prática. Propor o uso de itens da lista de exercícios, justificando didaticamente sua inserção.	Atividades 1 e 3

Continua...

Item de entrega	Conteúdo e requisitos	Atividade prévia relevante
VI. Recursos e materiais	Listagem de materiais concretos, tecnológicos ou visuais necessários para as etapas.	
VII. Avaliação pós-aula	Proposta de um instrumento de avaliação formativa ou somativa final para verificar se os objetivos foram atingidos.	

A tabela de rubricas a seguir foi revisada para focar na qualidade do planejamento de aula como um todo e na demonstração de CPC, mantendo a estrutura de *checklist* com três níveis de satisfação.

Critério avaliativo	Item (o que é exigido)	Não satisfeito	Parcialmente satisfeito	Satisfeito
A. Coerência do tema e dos objetivos	O conceito, o tema e os objetivos de aprendizagem (gerais e específicos) são claros, interligados e perfeitamente adequados ao ano escolar (1º ao 5º ano).	☐	☐	☐
B. Conexão diagnóstica (CPC)	O plano utiliza itens de diagnóstico e explica, de forma justificada, como as respostas dos alunos informam e direcionam a abordagem pedagógica da aula.	☐	☐	☐
C. Problema disparador (Atividade 3) e análise	O problema disparador (Atividade 3) é o ponto de partida obrigatório do plano e sua análise *a priori* (estratégias, piso baixo/teto alto) está completa e detalhada, demonstrando CPC.	☐	☐	☐
D. Desenvolvimento didático e integração (Atividades 1 e 3)	O plano descreve uma transição fluida do problema disparador (Atividade 3) para a formalização do conceito. A lista de exercícios (Atividade 1) é incorporada em um momento didaticamente justificado (consolidação/prática).	☐	☐	☐
E. Clareza do plano e recursos	O texto é formal e claro. A descrição das etapas inclui tempos estimados. Os recursos (materiais) e a proposta de avaliação pós-aula estão alinhados aos objetivos.	☐	☐	☐

Atividade 5 - Prova individual

Prova individual, constituída por questões com diversos itens, sendo que o primeiro deve necessariamente ser um item de conteúdo matemático e os seguintes devem versar sobre escolhas pedagógicas relacionadas a tal questão matemática. Eventualmente, a prova pode ser dividida em duas etapas:

Etapa 1
Conhecimento de conteúdo: em sala de aula e sem consulta.

Etapa 2
Conhecimento pedagógico de conteúdo: pode ser feita com consulta.

Embora os critérios de avaliação variem conforme as questões da prova, é fundamental que a nota mínima seja exigida em cada componente isoladamente, e não apenas na média final.

Referências bibliográficas

Referências relevantes de repertório docente

FIRER, Marcelo (coord.). **Cadernos autocorretivos:** frações. Elaboração: Douglas dos Santos Mariano da Silva *et al*. Campinas: IMECC-UNICAMP, 2021. Produto desenvolvido no âmbito do Programa Residência Pedagógica. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1n8mUHmWm-bXS02481NIHkAzygog3k6Nlq/view. Acesso em: 01 dez. 2025.

DANIELSON, Christopher. **Which One Doesn't Belong?** [S. l.]: Talking Math with Kids, [s.d.]. Disponível em: https://talkingmathwithkids.com/wodb/. Acesso em: 01 dez. 2025.

KIRA: Kinder Rechnen Anders. **Halbschriftliche Multiplikation**. Hamburgo: DZLM, [s.d.]. Disponível em: https://kira.dzlm.de/arithmetik/halbschriftliches-rechnen/halbschriftliche-multiplikation. Acesso em: 01 dez. 2025.

NATIONAL CENTRE FOR EXCELLENCE IN THE TEACHING OF MATHEMATICS (NCETM). **Eu e a sala de aula**. [S. l.: s. n.], [s.d.]. Slides. Disponível em: https://drive.google.com/drive/folders/134zl-5bFTmYnk35C0FpDqrHa27flzdJ_a?usp=sharing. Acesso em: 01 dez. 2025.

NATIONAL CENTRE FOR EXCELLENCE IN THE TEACHING OF MATHEMATICS (NCETM). **Home**. [S. l.]: NCETM, [s.d.]. Disponível em: https://www.ncetm.org.uk/. Acesso em: 01 dez. 2025.

NGUYEN, Fawn. **Visual Patterns**. [S. l.], [s.d.]. Disponível em: https://www.visualpatterns.org/. Acesso em: 01 dez. 2025.

PROJETO SEMENTES MATEMÁTICAS. **Página inicial**. [S. l.]: Mais.Mat, [s.d.]. Disponível em: https://www.mais.mat.br/sementes/index.php. Acesso em: 01 dez. 2025.

SANGIOVANNI, John J. **Mine the gap for mathematical understanding**: grades 6-8. Thousand Oaks: Corwin, 2017. Disponível em: https://www.tgjonesonline.co.uk/Product/John-J-SanGiovanni/Mine-the-Gap-for-Mathematical-Understanding-Grades-6-8--Common-Holes-and-Misconceptions-and-What-To-Do-About-Them/12250505. Acesso em: 01 dez. 2025.

STRATEGIC EDUCATION RESEARCH PARTNERSHIP (SERP). **Algebra by Example**. [S. l.]: SERP Institute, [s.d.]. Disponível em: https://www.serpinstitute.org/algebra-by-example. Acesso em: 01 dez. 2025.

Referências de pesquisa

AHARONI, Ron. **Aritmética para padres y madres**: un libro para adultos sobre la matemática escolar. Santiago: Editorial Universitaria de Chile, 2016. (Parte 3, Seção A).

ALONSO, Pedro Ramos. **Aritmética para maestros**. [S. l.: s. n.], 2019. (Capítulos 1.4 e 1.6). Licença Creative Commons BY-NC-SA. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1f45cjtEWSDv3HQJ-lDJFk3kQlK8QDMU3/view. Acesso em: 01 dez. 2025.

GOMES, Francisco Magalhães. **Pré-cálculo**: operações, equações, funções e trigonometria. São Paulo: Cengage Learning Brasil, 2018. (Capítulos 1 a 3).

MARECEK, Lynn *et al*. **Prealgebra 2e**. Houston: OpenStax, 2020. E-book. Disponível em: https://assets.openstax.org/oscms-prodcms/media/documents/Prealgebra2e-WEB_0qbw93r.pdf. Acesso em: 01 dez. 2025.


+ 15 =
24 + 6 = 30

UNIDADE 1

Pré-álgebra na formação docente: articulação entre aritmética e pensamento algébrico

Esta unidade investiga a pré-álgebra como campo fundamental para a compreensão do pensamento algébrico na educação básica e na formação de professores. Por meio da análise de estratégias de cálculo, propriedades das operações e situações que envolvem padrões e proporcionalidade, os futuros professores exploram como a aritmética sustenta e se transforma em ideias algébricas. As aulas articulam leitura teórica, resolução e discussão de tarefas, análise de produções de estudantes e construção de propostas didáticas. Ao final, espera-se que os licenciandos compreendam a pré-álgebra como processo de generalização, reconheçam as potencialidades das conversas numéricas e do raciocínio investigativo, e desenvolvam repertório pedagógico para introduzir o pensamento algébrico desde os anos iniciais.

Aula	Título da aula	Objetivos da aula	Principais atividades
1	**O que é pré-álgebra?**	Compreender fundamentos e elementos constitutivos da pré-álgebra. Identificar implicações didáticas do tema para o ensino. Reconhecer e explicitar concepções prévias sobre pré-álgebra.	Apresentação da ementa e do curso. Rotina "Antes eu pensava que... Agora eu penso que...". Leitura orientada do texto "*Algebra with numbers and arithmetic with letters*" (LINCHEVSKI, 1995). Discussão em duplas com roteiro. Sistematização coletiva das ideias-chave. Fechamento com retomada da rotina.
2	**Adição e subtração: estratégias e pensar algébrico**	Relacionar aritmética e álgebra por meio das operações de adição e subtração Analisar estratégias de cálculo mental e propriedades das operações. Reconhecer o papel das conversas numéricas no desenvolvimento do raciocínio.	Análise de estratégias aritméticas reais dos estudantes. Dinâmica de conversas numéricas com foco em subtração. Exploração das propriedades da adição e subtração (associativa, compensação, entre outras). Discussão do papel da incógnita em diferentes tipos de problemas.
3	**Multiplicação e divisão: propriedades e generalizações**	Relacionar as operações multiplicativas à construção de ideias algébricas. Explorar propriedades das operações e suas representações geométricas. Discutir a investigação matemática como prática formativa.	Discussão de tarefas envolvendo associatividade, distributividade, fator comum e elemento neutro. Representações geométricas (retângulos, decomposição de áreas). Sistematização das modalidades de cálculo (mental, convencional, aproximado, estimado). Debate sobre investigação matemática.
4	**Pensamento proporcional e invariantes multiplicativos**	Compreender o raciocínio proporcional como eixo central do pensamento algébrico. Identificar invariantes multiplicativos e diferenciar relações aditivas e multiplicativas. Elaborar situações didáticas envolvendo proporcionalidade.	Discussão de situações reais: problema do suco, ampliação de figuras, porcentagem. Análise de situações não proporcionais (perímetro × área; velocidade variável; desconto fixo). Criação, em grupos, de tarefas baseadas em situações reais, identificando invariantes e articulando com pré-álgebra.
5	**Seminário 1**		

UNIDADE 2:

Estruturas e relações algébricas: hierarquia operacional, igualdade, equivalência e recursos didáticos na pré-álgebra

Esta unidade aprofunda a transição entre aritmética e álgebra por meio da análise de expressões numéricas, da hierarquia das operações, e das ideias de igualdade e equivalência — conceitos fundamentais para o pensamento algébrico e frequentemente mal compreendidos pelos estudantes, impactando o início da álgebra formal.

São exploradas características estruturais das expressões, o uso intencional de parênteses, a distinção entre visão processual e visão estrutural, e o papel da equivalência na manipulação algébrica.

A unidade integra também resolução de problemas, análise de erros, reflexão teórica com base em literatura especializada e exploração de recursos didáticos (jogos, tarefas investigativas e tecnologias digitais).

Ao final, espera-se que os licenciandos compreendam a transição aritmética-algébrica como construção progressiva de significados estruturais e que sejam capazes de selecionar, adaptar e avaliar recursos didáticos para o ensino da pré-álgebra.

Aula	Título da aula	Objetivos da aula	Principais atividades
6	**A hierarquia das operações: expressões numéricas e a álgebra**	Compreender a função da ordem das operações na comunicação matemática. Usar parênteses conscientemente para expressar agrupamentos. Identificar e discutir erros decorrentes da não observância da hierarquia. Relacionar visão processual (aritmética) versus visão estrutural (álgebra).	Propor aos estudantes a resolução do problema "Os quatro quatros" (Tahan, 2001). Obter os números de 1 a 10 utilizando quatro algarismos 4 e os sinais aritméticos +, -, x, : , ( ) e =. Propor a descoberta de diversos resultados e perceber que pode haver mais de uma solução para chegar a cada resultado. Discutir casos em que os parênteses colocados são irrelevantes, por exemplo: 4 : 4 x 4 : 4 = 1 e (4: 4) x (4 : 4) = 1. Casos em que a presença dos parênteses altera totalmente o resultado: (4 + 4) : 4 + 4 = 6 e 4 + 4 : 4 + 4 = 9. Realizar um painel com diferentes formas de obter um mesmo número. Sistematização: visão processual (aritmética) — o aluno vê a expressão como uma "receita" ou uma sequência de comandos para fazer versus visão estrutural (álgebra) — o aluno vê a expressão como um objeto ou uma estrutura a ser analisada antes de qualquer cálculo.
7	**Recursos didáticos para explorar a função dos parênteses e a ordem das operações**	Compreender e analisar recursos didáticos que favorecem a aprendizagem da ordem das operações. Investigar o papel das calculadoras na compreensão da função dos parênteses. Analisar, a partir de leituras especializadas, como jogos e recursos tecnológicos auxiliam no desenvolvimento da compreensão da ordem das operações. Avaliar potencialidades e limitações desses recursos para o ensino de pré-álgebra e para o desenvolvimento de significados mais estruturais sobre expressões numéricas.	Explorar jogos matemáticos, como o Contig 60 (Grando, 2004) para explorar a hierarquia das operações. Explorar o uso da calculadora para resolver expressões numéricas: A) 6 + 8 x 9 e B) (6 + 8) x 9, por exemplo. Refletir por meio de artigos especializados sobre o papel desses recursos na aprendizagem matemática dos estudantes. Fechamento: potencialidades e limitações desses recursos para a prática de sala de aula.
8	**Igualdade não é sinal de operação: construindo uma visão relacional**	Compreender as concepções errôneas dos estudantes sobre o sinal de igualdade e por que elas surgem. Analisar respostas reais de alunos para identificar modos de pensar característicos. Relacionar essas concepções ao ensino da aritmética, da pré-álgebra e da álgebra. Elaborar e avaliar estratégias didáticas para reconstruir a visão relacional de igualdade.	Situações-gatilho com erros típicos (exemplo: 2 + 3 = 5 + 4 = 9). Análise coletiva: "O que o aluno está pensando?". Comparação entre igualdade operacional e igualdade relacional. Classificação e discussão de diferentes usos de "=". Construção de minitarefas que reforcem a igualdade como relação (exemplos: completar equivalências, explorar balanças, comparar expressões). Sistematização final: implicações para o ensino.
9	**Equivalência e relação entre as operações: do aritmético ao algébrico**	Compreender equivalência entre expressões numéricas e algébricas. Explorar equivalências numéricas e algébricas. Discutir como diferentes representações podem expressar a mesma relação. Desenvolver estratégias para ensinar equivalência e transformação de expressões.	Tarefas de verificação de equivalência: substituição de valores, argumentação algébrica, representações geométricas. O número 56 pode ser conseguido pela seguinte expressão: 56 = 7 x (10 - 2). Crie, a partir da igualdade 56 = 7 x (10 - 2), outras três cujos resultados sejam 7, 10 e 2. Análise de erros comuns em álgebra e na aritmética (exemplo: (2 (x + 3) = 2x + 3); Discussão sobre visão estrutural da expressão.
10	**Seminário 2**		

UNIDADE 3

Padrões, generalização e argumentação: fundamentos da pré-álgebra na formação docente

Esta unidade aprofunda a pré-álgebra a partir da análise de padrões, da construção e refutação de generalizações e da leitura crítica da BNCC. Os licenciandos exploram como padrões numéricos, geométricos e representacionais dão origem a ideias algébricas, bem como o papel da justificativa e da argumentação na validação ou refutação de conjecturas. São analisadas generalizações falsas, contraexemplos e estratégias de intervenção didática que valorizam o erro como elemento formativo.

Por fim, os estudantes estudam a progressão curricular da pré-álgebra na BNCC, articulando operações, propriedades, igualdade, equivalência, padrões e generalizações.

A unidade integra investigação matemática, análise de produções de alunos, leitura de documentos curriculares e construção de repertórios pedagógicos para o ensino inicial da álgebra.

Aula	Título da aula	Objetivos da aula	Principais atividades
11	**Padrões e regularidades**	Desenvolver o pensamento algébrico por meio da identificação e a análise de padrões. Promover a generalização e a sua justificativa como eixo da transição aritmética-álgebra. Valorizar o raciocínio investigativo e argumentativo na interpretação e elaboração de expressões e relações algébricas.	Propor a atividade: "Qual não pertence?" (Mentalidades Matemáticas, 2022). Discussão sobre padrões e regularidades a partir do vídeo "Padrões" (Youcubed, [s.d.]). Explorar padrões matemáticos diversos: numéricos, tabelas pitagóricas, padrões geométricos e métricos. Discutir sobre o papel das representações em matemática: visuais, numéricas e algébricas conectadas à codificação por meio de cores e explicações verbais.
12	**Refutação de padrões - contraexemplos**	Reconhecer e refutar generalizações falsas por meio de contraexemplos concretos. Compreender o erro como etapa essencial da aprendizagem e do pensamento crítico. Desenvolver estratégias pedagógicas para trabalhar conjecturas, validação e refutação.	• Propor conjecturas aparentemente verdadeiras e investigar quando falham (exemplo: dobrar perímetro → dobra área). • Grupos analisam "regras falsas comuns" e constroem contraexemplos claros para discutir a lógica por trás do erro (exemplo: "A multiplicação sempre aumenta o número."). • Discussão de dúvidas clássicas dos alunos (exemplo: "Professor, eu fiz (2+3)^2 = 5^2 e deu 25, mas se eu fizer 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13. Está errado, mas por quê?"). Debater: Qual é a diferença entre (A) apenas dizer "Está errado, a regra correta é..." e (B) usar o contraexemplo do aluno para investigar com a turma por que a regra falha? • Debate pedagógico: como usar o erro e o contraexemplo como ferramentas didáticas. • Sistematização: criar ambientes investigativos que acolham conjecturas.
13	**A pré-álgebra na BNCC: progressões e escolhas curriculares**	Compreender como a BNCC articula aritmética, propriedades, padrões, igualdade e equivalência como bases da álgebra. Identificar a progressão das habilidades de pré-álgebra do ensino fundamental. Refletir sobre recomposição de aprendizagens e planejamento curricular.	Estudo orientado da BNCC nas habilidades relacionadas à pré-álgebra (ensino fundamental). Rastreamento da progressão das aprendizagens: propriedades → padrões → generalização → igualdade → equivalência → expressões. Discussão orientada: "Como cuidar dessas aprendizagens em processos de recomposição?" Elaboração de síntese curricular da pré-álgebra na BNCC.
14 e 15	**Seminário final**		

Referências

INSTITUTO FEDERAL CATARINENSE (IFC). **Contig 60**. Concórdia: IFC – Campus Concórdia, 2023. Disponível em: https://licenciatura-matematica.concordia.ifc.edu.br/wp-content/uploads/sites/24/2023/09/Contig-60.pdf. Acesso em: 02 dez. 2025.

MENTALIDADES MATEMÁTICAS. **Qual não pertence?** São Paulo: Instituto Sidarta, 2022. 1 slide. Disponível em: https://mentalidadesmatematicas.org.br/wp-content/uploads/2022/11/Qual-nao-pertence_-10.pdf. Acesso em: 02 dez. 2025.

TAHAN, Malba. Os quatro quatros. *In*: TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 108 ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.

YOUCUBED. **Padrões**. [S. l.]: Stanford University, [s.d.]. Disponível em: https://www.youcubed.org/pt-br/resources/padroes/. Acesso em: 02 dez. 2025.

Exemplo de aula detalhado

Unidade 1

Pré-álgebra na formação docente: articulação entre aritmética e pensamento algébrico

Aula 01 - O que é pré-álgebra?

CONTEÚDOS DA AULA

- Pré-álgebra: ideias e concepções.
- Rotinas de pensamento: "Eu pensava que... Agora penso que...".

LEITURAS PARA A AULA *(sugeridas aos estudantes)*

ANDRADE, Julia Pinheiro (Org.). **Aprendizagens visíveis: Experiências teórico-práticas em sala de aula**. São Paulo: Panda Books, 2021.

LINCHEVSKI, Liora. Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra. **The Journal of Mathematical Behavior**, [S. l.], v. 14, n. 1, p. 113-120, mar. 1995. DOI: 10.1016/0732-3123(95)90026-8. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0732312395900268. Acesso em: 01 dez. 2025.

OBJETIVOS DA DISCIPLINA ABORDADOS NA AULA

- Entender o que caracteriza a pré-álgebra e como ela se insere no currículo dos anos iniciais do ensino fundamental.
- Identificar a transição entre aritmética e álgebra como um processo gradual de generalização de propriedades e relações numéricas.
- Compreender a relevância da pré-álgebra no desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme discutido por Linchevski (1995), especialmente na distinção entre operar com números e operar com relações.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA AULA

Ao final da aula, espera-se que os licenciandos sejam capazes de compreender e refletir sobre:

- Apresentar o curso e sua organização.
- Compreender a pré-álgebra como campo de transição entre a aritmética e a álgebra, reconhecendo seus fundamentos teóricos, seus elementos constitutivos (como generalização, equivalência e estrutura) e seu papel na construção do pensamento algébrico.
- Desenvolver a capacidade de análise e reflexão investigativa, identificando, na leitura do texto de Linchevski (1995), conceitos-chave e relações entre ideias, bem como as mudanças de compreensão acerca do significado e da função da pré-álgebra.
- Analisar as implicações didáticas da concepção de pré-álgebra para o ensino de matemática, discutindo estratégias, atividades e tarefas que promovam o pensamento algébrico em ambientes numéricos e que possam ser aplicadas nos anos finais do ensino fundamental.

SUGESTÕES PARA A AULA

Esta aula tem como finalidade ajudar os licenciandos a compreenderem os fundamentos conceituais e didáticos da disciplina, situando a pré-álgebra como campo de transição entre a aritmética e a álgebra. Apresentar o curso e sua organização.

Para iniciar, propõe-se um levantamento prévio das concepções dos estudantes sobre o tema, utilizando a rotina de pensamento “Antes eu pensava que... Agora eu penso que...”.

Essa atividade busca:

- **Favorecer o balanço metacognitivo do estudante, ao possibilitar que ele identifique suas ideias iniciais sobre o tema e reconheça como elas se transformam ao longo das experiências e discussões.**
- **Desenvolver o raciocínio crítico e as habilidades reflexivas, ao convidar o estudante a explicar como e por que seu pensamento mudou, estabelecendo relações de causa e consequência.**

- **Tornar o aprendizado visível tanto para o estudante quanto para o professor, evidenciando o percurso de aprendizagem e não apenas o resultado.**

A estratégia consiste em solicitar aos estudantes que registrem:

- **Antes eu pensava que... (pode ser adaptado, por exemplo, para: "Eu penso que a pré-álgebra se refere a...").**

Ao final da aula, retomam seus registros e, em uma segunda coluna, anotam:

- **Agora eu penso que...**

Nesse espaço, explicam as aprendizagens, ampliações e análises realizadas ao longo da discussão.

Sugere-se incluir uma terceira coluna:

- **Então, eu me pergunto se...,**

Desse modo, **estimula-se a formulação de novas perguntas, hipóteses e conexões**, promovendo uma atitude investigativa diante do conhecimento matemático.

Após essa atividade inicial, propõe-se a leitura do texto:

- *"Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra"* (LINCHEVSKI, 1995)

Propõe-se a realização da leitura em blocos, seguindo o roteiro abaixo, para posterior discussão em pequenos grupos após a leitura individual.

Objetivo: identificar conceitos-chave e compreender a argumentação da autora.

Organize a leitura em **três blocos**, com foco investigativo em cada um:

Bloco 1 – Pensar algebricamente em um ambiente numérico (p. 113-114)

- O que significa "pensar algebricamente sem usar letras"?
- Que diferenças a autora aponta entre o uso do sinal de igualdade na aritmética e na álgebra?
- Em que sentido as operações e expressões numéricas podem ser tratadas como "objetos" (SFARD, 1995 *apud* LINCHEVSKI, 1995)?

Bloco 2 – O papel dos pré-conceitos e das atividades de pré-álgebra (p. 114-116)

- **O que Linchevski (1995) entende por pré-conceitos?**

- **Por que eles são considerados essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico formal?**
- **Quais atividades o grupo estudado pela autora considerou relevantes para construir pré-conceitos (exemplos: padrões numéricos, uso de colchetes, ordem das operações, generalizações)?**

Bloco 3 – A pré-álgebra como transição e preparação para a álgebra formal (p. 117-119)

- **De que modo a autora define a função da pré-álgebra na aprendizagem matemática?**
- **Que características cognitivas dos alunos precisam ser consideradas nessa transição?**
- **Como a autora relaciona o uso de tecnologia (calculadora, computador) ao desenvolvimento do pensamento pré-algébrico?**

Sugere-se uma sistematização coletiva das principais ideias do texto.

Para a finalização da aula, solicita-se que os estudantes retomem a sua rotina de pensamento e preencham as duas últimas partes da tabela, a partir das reflexões:

- Que mudanças conceituais sobre a pré-álgebra a leitura provocou?
- Que implicações pedagógicas essa concepção traz para o ensino da matemática nos anos finais do fundamental?
- Que tarefas concretas poderiam expressar a ideia de "pensar algebricamente em um ambiente numérico"?

Para explorar essa última questão, sugere-se que os estudantes pensem em um exemplo de tarefa pré-algébrica para compor o ambiente numérico.

Aula 2 - Adição e subtração: estratégias e pensar algébrico

CONTEÚDOS DA AULA

- Diferentes estratégias de cálculo mental para adição e subtração de números naturais e as propriedades das operações (associativa e comutativa) presentes nas operações de adição e subtração.
- O papel das incógnitas nas operações presentes no campo aditivo.
- Conversas numéricas como estratégia didática.

LEITURAS PARA A AULA *(sugeridas aos estudantes)*

BROITMAN, Claudia. **As operações matemáticas no Ensino Fundamental I**: contribuições para o trabalho em sala de aula. São Paulo: Ática, 2011. (Nós da educação).

FONTES, Cíntia Gomes da. **O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-11112010-162005/publico/CINTIA_GOMES_DA_FONTES.pdf. Acesso em: 01 dez. 2025.

HUMPHREYS, Cathy; PARKER, Ruth. **Conversas numéricas**: estratégias de cálculo mental para uma compreensão profunda da matemática. Porto Alegre: Penso, 2019.

PARRA, Cecília. Cálculo mental na escola primária. *In*: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

QUARANTA, Maria Emilia; WOLMAN, Susana. Discussões nas aulas de matemática: o que, para que e como se discute. *In*: PANIZZA, Mabel (org.). **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análise e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 111-142.

OBJETIVOS DA DISCIPLINA ABORDADOS NA AULA

- Compreender e ser capaz de explicitar o funcionamento dos algoritmos aritméticos, indo além da execução de procedimentos.
- Compreender e aplicar as propriedades fundamentais das operações (comutatividade, associatividade, distributividade) como base para a manipulação algébrica.

- Propor e conduzir discussões matemáticas que promovam a explicitação de raciocínios, a comparação de estratégias e a reflexão sobre diferentes formas de representar e resolver problemas.
- Selecionar e adaptar tarefas que envolvam, por exemplo:
  - Generalizações baseadas em cálculos aritméticos (exemplo: Se 7 + 5 = 12, então 70 + 50 = __).
  - Análise de igualdade (exemplo: Julgar a veracidade de expressões como 4 + 3 = 3 + 4 ou 3 + 4 = 7 = 2 + 5.).
  - Uso de letras como variáveis ou incógnitas em situações simples (exemplo: a + 3 = 10).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA AULA

Ao final da aula, espera-se que o futuro professor seja capaz de:

- Compreender a relação entre a aritmética e a álgebra a partir da análise de situações-problema envolvendo as operações de adição e subtração, reconhecendo o papel reflexivo dessas operações e de suas propriedades na construção do pensamento algébrico, de modo a desenvolver o conhecimento pedagógico necessário para antecipar e lidar com possíveis dificuldades dos estudantes.

Em particular o estudante deverá ser capaz de:

- Compreender de que modo os procedimentos de cálculo mental se fundamentam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações aritméticas, identificando como esses conhecimentos se articulam à construção do pensamento algébrico.
- Desenvolver a flexibilidade numérica e operatória por meio da análise e uso de diferentes estratégias de cálculo mental, reconhecendo padrões, regularidades e relações que sustentam a generalização algébrica.
- Reconhecer o potencial das conversas numéricas como instrumento formativo que permite investigar os modos de pensar dos estudantes, promovendo a reflexão sobre estratégias, propriedades e significados que favorecem a transição da aritmética para a álgebra.

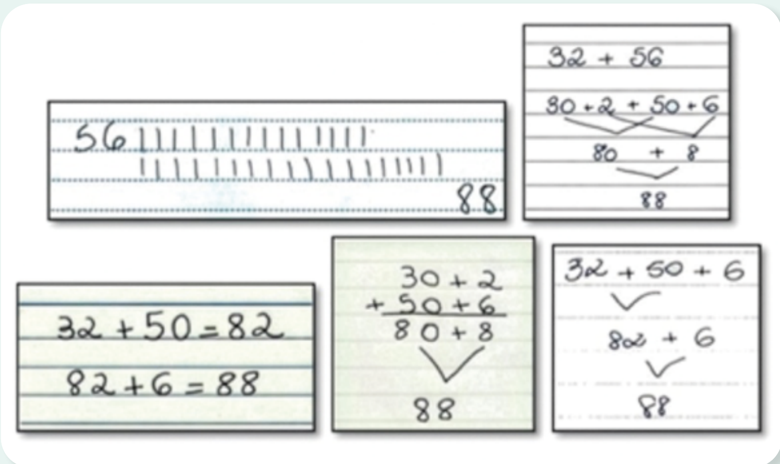
SUGESTÕES PARA A AULA

1. Explorando produções dos estudantes

Apresentação da situação-problema e registro de estudantes a respeito dela: quais conhecimentos sobre o sistema de numeração decimal e as propriedades das operações estão presentes nesses registros?

Um exemplo:

No seu álbum de adesivos, Joyce tem 32 adesivos brilhantes e 56 adesivos comuns. Quantos adesivos Joyce já tem?



Explorar os algoritmos apresentados pelos diferentes estudantes e o conceito sobre flexibilidade numérica. Possíveis problematizações:

- **Como pensou cada estudante?**
- **Que conhecimentos trazem sobre o sistema de numeração decimal e as propriedades das operações?**
- **De que modo representaram esses conhecimentos?**
- **Como eles se relacionam com a pré-álgebra?**

- O princípio aditivo e o valor posicional do sistema de numeração decimal para compor e decompor as parcelas em outras duas. Por exemplo: 32 = 30 + 2.
- A propriedade comutativa da adição: em uma adição de duas parcelas, podemos mudar de lugar as parcelas que o total ou a soma permanece o mesmo. Por exemplo: 50 + 6 = 6 + 50.
- A propriedade associativa da adição: numa adição de três ou mais parcelas, podemos associá-las duas a duas, de qualquer maneira, que a soma será a mesma: 30 + 2 + 50 + 6.

2. Explorar os princípios norteadores para conversas numéricas

- **Vivenciar uma atividade de conversa numérica para uma subtração: 63 - 28, conforme os dez princípios expostos no capítulo "Princípios norteadores para adotar conversas numérica em sala de aula", do livro "Conversas numéricas" (HUMPHREYS; PARKER, 2019).**

- **Explorar as estratégias de subtração em profundidade:**

  a. Arredondar o subtraendo até um múltiplo de 10 ou um número inteiro mais próximo e ajustar. Exemplo: 63-30 = 33; 33 + 2 = 35.
  b. Decompor o subtraendo. Exemplo: 63-20 = 43; 43 - 3 = 40; 40 - 5 = 35.
  c. Em vez de subtrair, somar (ideia de completar). Exemplo: 28 + 2 = 30; 30 + 33 = 63. Logo 33 + 2 = 35.
  d. A mesma diferença como resultado (somar ou subtrair o minuendo e subtraendo para manter a operação). Exemplo: 63 - 28 = 65 - 30 = 35.

- **Aprofundar a discussão com os estudantes sobre essa estratégia metodológica e a relação dessa prática em contraposição a um ensino que privilegia apenas a exploração dos cálculos convencionais para o desenvolvimento do pensar algébrico.**

3. A resolução de problemas e o papel da incógnita

Sugestão de questões para problematizar:

- **A professora Z, disse que "problemas do tipo: 'Ana tem 7 frutas no total. Se 3 são maçãs, quantas são laranjas?' são muito difíceis e confundem as crianças". Decidiu, então, que problemas assim não farão parte de seus planejamentos no decorrer do ano. Você concorda com a decisão tomada por essa professora? Por quê? Qual a importância desse tipo de situação para o desenvolvimento do pensar algébrico?**

- **Apresentar dados de acertos de estudantes quando a situação-problema tem a incógnita em lugares distintos. Analisar dados segundo Cummins et al (1988).**

- **Problematizar: o que acontece com a quantidade de acerto quando a incógnita muda de posição nas situações-problemas? De que forma a modelização pode apoiar o desenvolvimento das diferentes ideias presentes no campo aditivo?**

4. Sistematização

- **Com o apoio do grupo, montar um mapa mental de ideias desenvolvidas na aula.**

Referências

CUMMINS, Denise Dellarosa *et al*. The role of understanding in solving word problems. **Cognitive Psychology**, [S. l.], v. 20, n. 4, p. 405–438, 1988. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/222165025_The_role_of_understanding_in_word_problems. Acesso em: 02 dez. 2025.

HUMPHREYS, Cathy; PARKER, Ruth. **Conversas numéricas**: estratégias de cálculo mental para uma compreensão profunda da matemática. Porto Alegre: Penso, 2019.

Aula 3 - Multiplicação e divisão: propriedades e generalizações

CONTEÚDOS DA AULA

- Propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação.
- Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
- Interpretações concretas e simbólicas dessas propriedades.
- Relação entre as propriedades e a estrutura do sistema de numeração decimal.

LEITURAS PARA A AULA *(sugeridas aos estudantes)*

AHARONI, Ron. **Aritmética para padres y madres**: un libro para adultos sobre la matemática escolar. Santiago: Editorial Universitaria de Chile, 2016. (Parte 3, Seção B).

ALONSO, Pedro Ramos. **Aritmética para maestros**. [S. l.: s. n.], [20--]. (Capítulos 1.6 e 1.7). Licença Creative Commons BY-NC-SA. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1f45cjtEWSDv3HQJ-lDJFk3kQlK8QDMU3/view. Acesso em: 01 dez. 2025.

BROITMAN, Claudia. **As operações matemáticas no Ensino Fundamental I**: contribuições para o trabalho em sala de aula. São Paulo: Ática, 2011. (Nós da educação).

KUPFERMAN, Raz. **Elementary School Mathematics for Parents and Teachers**: volume 1. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2015. (Capítulos 7 e 8).

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. (Capítulo 13).

OBJETIVOS DA DISCIPLINA ABORDADOS NA AULA

- Compreender e ser capaz de explicitar o funcionamento dos algoritmos aritméticos, indo além da execução de procedimentos.
- Compreender e aplicar as propriedades fundamentais das operações (comutatividade, associatividade, distributividade) como base para a manipulação algébrica.
- Propor e conduzir discussões matemáticas que promovam a explicitação de raciocínios, a comparação de estratégias e a reflexão sobre diferentes formas de representar e resolver problemas.
- Selecionar e adaptar tarefas que envolvam, por exemplo: generalizações baseadas em cálculos aritméticos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA AULA

Ao final da aula, espera-se que o futuro professor seja capaz de:

- Compreender a relação entre a aritmética e a álgebra a partir da análise de situações-problema envolvendo as operações de multiplicação e divisão, reconhecendo o papel reflexivo dessas operações e de suas propriedades na construção do pensamento algébrico, de modo a desenvolver o conhecimento pedagógico necessário para antecipar e lidar com possíveis dificuldades dos estudantes.

Em particular o estudante deverá ser capaz de:

- Compreender de que modo os procedimentos de cálculo mental se fundamentam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações aritméticas, identificando como esses conhecimentos se articulam à construção do pensamento algébrico.
- Desenvolver a flexibilidade numérica e operatória por meio da análise e do uso de diferentes estratégias de cálculo mental, reconhecendo padrões, regularidades e relações que sustentam a generalização algébrica.
- Compreender a investigação como um processo privilegiado de fazer matemática, reconhecendo seu papel na construção de significados, na formulação e na resolução de problemas, e no desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação e da autonomia intelectual dos estudantes, conforme os princípios propostos pela BNCC.

SUGESTÕES PARA A AULA

Abertura – Discussão inicial com situações-problema para explorar as propriedades da multiplicação.

Iniciar a aula com situações nas quais as propriedades comutativa, associativa, distributiva e elemento neutro são evocadas. Entregar quatro tipos de tarefas (cada grupo pode ficar com uma). Pedir para analisar:

- Quais propriedades das operações estão sendo mobilizadas?
- Qual a relação com o desenvolvimento do pensamento algébrico?
- Como a investigação se faz presente em cada proposta?

Exemplos:

TAREFA 1

Se na calculadora você tivesse que fazer as seguintes multiplicações sem a tecla 8 funcionar, como poderia resolvê-las?

4 × 8 =__   6 × 8 =__   7 × 8 =__

E se tivesse que fazer estas outras sem usar a tecla 7?

4 × 7 =__   10 × 7 =__   5 × 7 =__

TAREFA 2

Complete a tabela sem fazer uso da calculadora ou de um cálculo convencional ("conta armada")

Fator	Fator	Produto
14	8	112
14	16	
14	24	
14	32	
14	48	
14	80	
14	800	
14	8 000	

Escreva duas outras conclusões que podem ser tiradas a partir da tabela: uma verdadeira e outra falsa.

TAREFA 3

Podemos resolver a seguinte divisão 72 ÷ 8 por 3 modos diferentes:

1º modo: 72 ÷ 8 = (72 ÷ 2) ÷ 4 = 36 ÷ 4 = 9

2º modo: 72 ÷ 8 = (64 + 8) ÷ 8= (64 ÷ 8) + (8 ÷ 8) = 8 + 1 = 9

3º modo: 72 ÷ 8 = (80 – 8) ÷ 8 = (80 ÷ 8) – (8 ÷ 8) = 10 – 1 = 9

Escolha um dos modos e efetue as divisões a seguir:

96 ÷ 6 =

84 ÷ 6 =

102 ÷ 6 =

76 ÷ 4 =

TAREFA 4

Use a calculadora para determinar o resultado das operações a seguir e responda: qual é o efeito do zero e do um nas multiplicações e nas divisões?

0 x 25 = ___ 1 x 25 =___ 0 ÷ 25 =___ 25 ÷ 1 =___

0 x 123 = ___ 1 x 123 =___ 0 ÷ 123 =___ 123 ÷ 1 = ___

25 x 0 = ___ 25 x 1 =___ 25 ÷ 0 = ____ 1 ÷ 25 = ___

123 x 0 = ___ 123 x 1 = ___ 123 ÷ 0 = ____ 1 ÷ 123 = ___

2. Representações geométricas e significado das propriedades

- Utilizar arranjos retangulares (linhas e colunas) para explorar o sentido da comutatividade e da distributividade.
- Introduzir a propriedade distributiva com situações de área:

Exemplo: Dois terrenos consecutivos de mesma largura *A*, um com comprimento 12 e outro com 8. A área total é:

- Variar o valor de antes de introduzir o uso de letras, para mostrar a transição gradual da aritmética para a álgebra.

3. Exploração de algoritmos e estrutura do sistema decimal

MODO A

$$\begin{array}{r} 637 \\ \times\ 84 \\ \hline 2548 \\ 5096 \\ \hline 53508 \end{array}$$

MODO B

$$\begin{array}{r} 637 \\ \times\ 84 \\ \hline 28 \\ 120 \\ 2400 \\ 560 \\ 2400 \\ 48000 \\ \hline 53508 \end{array}$$

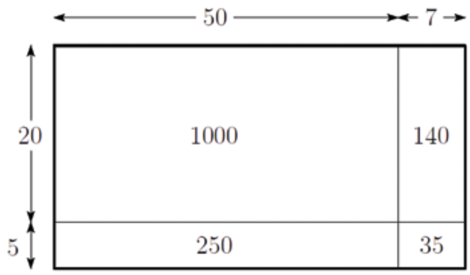
MODO C

$$\begin{array}{r} 637 \\ \times\ 84 \\ \hline 50960 \\ +\ 2548 \\ \hline 53508 \end{array}$$

MODO D

	600	30	7	
80	48 000	2 400	560	50 960
4	2400	120	28	2 548
	50 400	2 520	588	53 508

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times\ 25 \\ \hline 35 \\ 250 \\ 140 \\ +\ 1000 \\ \hline 1425 \end{array}$$



- Analisar como as propriedades justificam procedimentos dos algoritmos de adição e multiplicação (reagrupamentos, decomposição de números, cálculo mental).

4. Síntese e discussão pedagógica

- Retomar o papel dessas propriedades na construção do pensamento algébrico.
- Discutir como propor problemas e representações que tornem essas propriedades visíveis e compreensíveis para alunos da educação básica.
- Discutir a investigação como processo privilegiado de fazer matemática.


bx + c = 0
Δ = b² - 4.a.c
A

Δ

b^2

$\sqrt{9}$

EQUAÇÕES POLINOMIAIS: evolução e metodologias

Aline dos Reis Matheus[1], Rita Santos Guimarães[2], Roberto Cesar Cucharero Peregrina[3]

INFORMAÇÕES GERAIS DA DISCIPLINA

Semestre estimado de curso:
1º semestre (início da graduação)

Carga horária prevista:
60 horas

Número de semanas previstas:
15 semanas

Duração das aulas:
4 horas semanais

[1] Lattes: **http://lattes.cnpq.br/6833900874417985**
[2] Lattes: **http://lattes.cnpq.br/3516834883984914**
[3] Lattes: **http://lattes.cnpq.br/5254233454104305**

O CPC no programa “Equações polinomiais”

Bárbara Born

O foco deste programa de disciplina é o trabalho com a resolução de equações, considerando o papel central desse tema no ensino da educação básica. Além de abordar, de maneira estruturada e aprofundada, os conceitos matemáticos necessários à resolução de problemas envolvendo equações polinomiais, a disciplina proposta também explora aspectos conceituais e sua evolução histórica de forma cuidadosa.

A construção desse programa é um excelente exemplo de como o trabalho com o conhecimento pedagógico do conteúdo exige articular, de maneira clara e organizada, um conhecimento profundo sobre o conteúdo a ser ensinado. Um aspecto do CPC que atravessa todo o programa diz respeito às formas de representação do conteúdo para os estudantes — tarefa que depende diretamente de um entendimento disciplinar sólido.

Há, ainda, uma exploração particularmente interessante da análise de atividades dos estudantes, com exemplos que podem ser utilizados junto aos futuros professores para ampliar o entendimento de erros e compreensões parciais. Outro elemento que se destaca na proposta é a aplicação dos conhecimentos construídos pelos licenciandos ao planejamento de atividades para os estudantes da educação básica.

No exemplo de aula proposto pelos docentes responsáveis, as etapas de conhecimento do conteúdo e de conhecimento pedagógico do conteúdo aparecem de forma bastante clara: primeiro, os licenciandos se envolvem na investigação dos conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas; em seguida, exploram potenciais respostas de alunos à mesma questão. Esse tipo de atividade fortalece o repertório do futuro professor com estratégias e abordagens específicas para antecipar questões importantes em sala de aula, ao mesmo tempo que favorece a exploração de diferentes formas de representação do conteúdo.

Por fim, merece destaque neste programa o detalhamento das atividades avaliativas propostas. Além da descrição minuciosa das atividades, os critérios de avaliação são apresentados de maneira clara. Com isso, os autores do programa não apenas facilitam o processo de correção, mas também oferecem aos licenciandos a vivência de um modelo de avaliação coerente com os objetivos de aprendizagem e que apresenta alternativas aos modelos mais tradicionais.

Assim como no programa de pré-álgebra, esperamos que este programa possa inspirar docentes de cursos de álgebra e de outras áreas da matemática no desenho de seus próprios programas disciplinares. A estrutura, a coerência com os objetivos de aprendizagem e a natureza das atividades propostas oferecem clareza no desenvolvimento do CPC do licenciando, o que pode ser inspirador para docentes em diferentes componentes curriculares. Descrição da disciplina

Esta disciplina discutirá a evolução de conceitos matemáticos para apresentar diferentes metodologias de representação e resolução de equações. A intenção é que o futuro professor aborde o tema, na educação básica, com maior flexibilidade e por meio de uma estratégia que articule aspectos procedimentais a aspectos conceituais do tema. Além disso, pretende provocar reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de equações polinomiais a partir da perspectiva das demandas autênticas da docência: discussão sobre modos de apresentar e representar conceitos, avaliar a compreensão dos estudantes, bem como reconhecer, antecipar e interpretar erros usuais.

Objetivos da disciplina

Durante as aulas, você desenvolverá habilidades para ensinar equações polinomiais na educação básica e construirá conhecimentos sobre a evolução de conceitos cruciais relacionados ao tema: incógnitas, igualdade, equivalência, representações e métodos resolutivos.

Esperamos que, ao final do módulo, você possa:

1. Explicar a noção de incógnita, reconhecendo sua presença em problemas aritméticos anteriores à introdução da linguagem algébrica.
2. Reconhecer, em diferentes culturas e tempos históricos, as práticas e as formas de representação de incógnitas e equações polinomiais, incluindo os avanços ocorridos nos séculos XV e XVI.
3. Reconhecer obstáculos e dificuldades dos estudantes na aprendizagem da álgebra das equações, descritos na literatura especializada.
4. Aplicar diferentes métodos resolutivos para equações polinomiais, tais como isolamento da incógnita, fatoração, completamento de quadrados, fórmulas resolutivas, entre outros.
5. Selecionar ou produzir exemplos e atividades para ensinar métodos de resolução de equações.
6. Interpretar resoluções de atividades de estudantes da educação básica sobre equações para subsidiar intervenções didáticas adequadas.
7. Compreender o desenvolvimento histórico da notação algébrica, analisando sua arbitrariedade e sua funcionalidade.

IMPORTANTE

Observe que os objetivos da disciplina estão todos conectados em torno de uma premissa central: **a resolução de equações tem uma longa evolução na história da matemática, incluindo o desenvolvimento de conceitos, de representações e de procedimentos, indo além de fórmulas prontas**. Cada um dos objetivos especifica um aspecto necessário para contemplar o propósito geral da disciplina, que é **desenvolver tanto o conhecimento matemático** (CC) quanto **o conhecimento pedagógico do conteúdo** (CPC) **das equações polinomiais**. Assim, a cada aula planejada, é importante que você reflita sobre como as atividades propostas se conectam com esses objetivos e com esse propósito geral.

Avaliação e notas

Esperamos que você acompanhe todas as aulas, participe ativamente e entregue as tarefas dentro do prazo. Cada atividade apresenta instruções claras e critérios de avaliação específicos. Os comentários — feitos por seus colegas, pelo docente e pelos monitores — ajudarão você a compreender em que medida cada critério foi atendido e quais aspectos podem ser aprimorados.

A estrutura das atividades já prevê momentos e oportunidades para revisar e aperfeiçoar o próprio trabalho, com base no retorno recebido. Caso o desempenho não atinja o padrão esperado, o docente poderá solicitar ajustes ou reapresentação parcial da tarefa. Aproveite esse processo: busque apoio de seus pares, do docente e dos monitores sempre que precisar. Essas etapas de aprimoramento fazem parte da experiência formativa e são uma oportunidade valiosa de aprofundar a aprendizagem.

Atividade avaliativa 1 - Diagnóstico individual inicial

Atividade diagnóstica para identificar as estratégias numéricas e algébricas utilizadas pelos estudantes em problemas que envolvem incógnitas. Cada questão deve ser resolvida de dois modos distintos — um algébrico (com uso de equações, inequações ou sistemas) e outro não algébrico (com raciocínios aritméticos, gráficos, esquemas ou representações visuais). O foco está na observação das estratégias e da compreensão conceitual, e não na correção das respostas. A pontuação considera apenas a completude da entrega, conforme checklist avaliativo.

Atividade avaliativa 2 - Análise de caso de ensino em grupo

Atividade em grupo para análise de um caso de ensino sobre a introdução da linguagem algébrica por meio de equações. Os estudantes devem interpretar os desafios enfrentados por um professor e por seus alunos, relacionando-os a obstáculos típicos da aprendizagem da álgebra e das equações polinomiais. Devem, ainda, propor encaminhamentos didáticos coerentes com a situação analisada. A produção é orientada por um roteiro de análise e avaliada por meio de rubrica, utilizada nas etapas de autoavaliação, avaliação por pares e avaliação docente.

Atividade avaliativa 3 - Prova individual com mapa de avanço coletivo posterior

Prova individual para a mobilização do conhecimento matemático e pedagógico do conteúdo na resolução e análise de equações polinomiais. Após a correção, o docente elabora um mapa de avanço coletivo, contendo novas perguntas reflexivas e de aprofundamento para cada item da prova, a fim de promover a reelaboração conceitual e didática. Todos os estudantes devem responder às questões do mapa, independentemente do desempenho inicial. A atividade vale 3 pontos: 2 referentes à prova e 1 à participação nas respostas ao mapa de avanço.

Atividade avaliativa 4 - Elaboração de organizador gráfico em grupo

Atividade em grupo para a síntese visual dos principais métodos históricos de representação e resolução de equações polinomiais, destacando suas conexões conceituais e evolutivas. Cada grupo deve elaborar um organizador gráfico (linha do tempo, mapa conceitual, diagrama, entre outros) que evidencie a diversidade de representações e métodos, bem como suas relações com a linguagem algébrica contemporânea. Os trabalhos serão apresentados em exposição coletiva, acompanhada de perguntas elaboradas pelos grupos para promover o debate e o aprofundamento. A pontuação considera a completude da entrega e a participação nas discussões formativas.

Atividade avaliativa 5 - Elaboração de plano de atividade didática em duplas

Elaboração, em duplas, de um plano de atividade para o ensino de um método resolutivo específico de equações polinomiais. A proposta deve situar o conteúdo na progressão curricular, justificar o momento de introdução do método e incluir tarefas que envolvam a participação ativa dos alunos, com a antecipação de possíveis erros e estratégias de intervenção. A atividade inclui etapa de avaliação entre pares e revisão do plano antes da entrega final. A nota (até 2 pontos) será atribuída com base em rubrica que considera coerência didática, adequação curricular, qualidade das estratégias de ensino e clareza do texto.

Quadro resumo das atividades avaliativas

Atividades avaliativas		Prazos de entrega
Atividade 1	Diagnóstico individual inicial (1,0 ponto)	Aula 01
Atividade 2	Análise de caso de ensino em grupo (2,0 pontos)	Aulas 06 e 07
Atividade 3	Prova individual (3,0 pontos)	Aulas 17 e 18
Atividade 4	Organizador gráfico em grupo (2,0 pontos)	Aulas 20 e 21
Atividade 5	Plano de atividade em duplas (2,0 pontos)	Aulas 27 e 28

IMPORTANTE

O conjunto de atividades avaliativas dessa disciplina parte da concepção preponderante de avaliação **como processo formativo**, contemplando diferentes modalidades (diagnóstica, processual, colaborativa e individual), variadas formas de expressão (texto, representação visual, prova, plano didático, entre outras) e oportunidades reiteradas de reelaboração conceitual.

Portanto, é importante que o docente mantenha explícito o caráter formativo das avaliações também no modo como conduz e devolve cada uma delas. Para isso, recomenda-se que:

- **Enfatize o propósito formativo** junto aos estudantes, deixando claro que as avaliações não se limitam à atribuição de notas, mas visam apoiar a aprendizagem e o desenvolvimento profissional docente.
- **Valorize as devolutivas qualitativas**, utilizando as rubricas e *checklists* já propostos não apenas como instrumentos de correção, mas como guias de devolutivas — indicando avanços, lacunas e possibilidades de aprimoramento.
  Assegure a coerência entre nota e processo, de modo que a pontuação final expresse a trajetória de aprendizagem (participação, reflexão, reelaboração e compromisso), e não apenas o produto entregue.
- **Integre momentos de autoavaliação e avaliação por pares** como parte efetiva do processo, favorecendo o engajamento crítico e o desenvolvimento da autonomia avaliativa dos futuros professores.
- **Mantenha o registro sistemático** das observações qualitativas (em fichas ou diários de campo da docência) para retroalimentar tanto o acompanhamento individual quanto a revisão contínua da própria proposta avaliativa.

As descrições detalhadas das atividades avaliativas e ferramentas de apoio (rubricas e outros) apresentadas a seguir são fundamentais para dar sustentação a esse processo, tornando as devolutivas mais **qualitativas, orientadoras e fundamentadas**, ao mesmo tempo que garantem **transparência e rigor na atribuição de notas**.

Atividade 1 - Diagnóstico individual inicial

O principal propósito desta atividade avaliativa é conhecer as estratégias numéricas e algébricas dos estudantes para lidar com problemas envolvendo incógnitas. Dessa forma, as evidências de conhecimento matemático prévio levantadas se conectam diretamente aos **objetivos**:

1 **Explicar a noção de incógnita, reconhecendo sua presença em problemas aritméticos anteriores à introdução da linguagem algébrica.**

3 **Aplicar diferentes métodos resolutivos para equações polinomiais, tais como isolamento da incógnita, fatoração, completamento de quadrados, fórmulas resolutivas, entre outros.**

Forma da atividade

A atividade consiste numa **lista cujos problemas** devem ser resolvidos, necessariamente, por dois meios diferentes:

- **Resolução algébrica**, que implica a tradução do problema para equações, inequações, sistemas, entre outros. A lista incluirá problemas que possam suscitar diferentes formas de resolução de equações
- **Resolução por métodos alternativos** que não envolvam o uso da linguagem algébrica, incluindo operações aritméticas, esquemas, gráficos, desenhos, figuras geométricas, explicações verbais, entre outros.

A lista deverá ser resolvida individualmente, preferencialmente em classe. Antes da resolução, deve ser apresentado e discutido o *checklist* apresentado mais adiante.

Processo avaliativo

O foco avaliativo está em **identificar o conhecimento prévio dos estudantes**, assim, os **critérios estarão centrados na qualidade e na completude do trabalho**, mas não necessariamente na correção das soluções apresentadas.

Autoavaliação

Antes da entrega final, cada estudante deverá utilizar o *checklist* a seguir para avaliar a qualidade e a completude do seu trabalho, fazendo os ajustes necessários antecipadamente.

Avaliação pelo docente

Após a entrega, o docente aplicará o mesmo checklist para avaliar a qualidade e a completude do trabalho.

Devolutiva formativa

A devolutiva será coletiva e será realizada por meio da seleção de métodos algébricos e não algébricos utilizados pelos estudantes, tanto para ilustrar, discutir e superar equívocos observados como para partilhar raciocínios interessantes.

Atribuição de notas

Por se tratar de um diagnóstico, a atribuição de notas será em função da entrega e da completude do trabalho, independentemente de eventuais erros nas resoluções — que serão objeto de análise.

Entrega completa, conforme *checklist*.	**1,0 ponto**
Entrega parcial ou com algum desacordo em relação ao *checklist*.	**0,5 ponto**
Atividade não entregue.	**0 ponto**

Checklist

Critério	Descrição	Sim	Parcial	Não
1. Duas formas de resolução por problema	**Cada problema foi resolvido de dois modos diferentes: uma resolução algébrica e outra não algébrica (por exemplo:** aritmética, desenho, gráfico, tentativa, raciocínio verbal, entre outros).	☐	☐	☐
2. Organização e clareza	As etapas estão apresentadas de forma **legível e organizada**, permitindo entender o raciocínio usado. O leitor consegue seguir o pensamento.	☐	☐	☐
3. Resolução algébrica com tradução correta do enunciado	A resolução algébrica **traduz o problema para uma ou mais equações/inequações/sistemas**, indicando claramente o que é a **incógnita** e as operações realizadas para determinar seu valor.	☐	☐	☐
4. Resolução não algébrica com raciocínio explícito	A resolução não algébrica mostra **como o problema foi pensado sem usar equações**, por meio de cálculos, desenhos, tabelas, tentativas ou raciocínios explicados. Não basta apenas escrever as operações e o resultado.	☐	☐	☐
5. Correspondência entre as duas resoluções	As duas formas de resolução conduzem a resultados **compatíveis entre si**, mesmo que com justificativas diferentes.	☐	☐	☐
6. Identificação da incógnita e explicação do raciocínio	O estudante **nomeia ou indica claramente o que está sendo procurado** ("o número é…", "a medida é…") e explica **como pensou**.	☐	☐	☐
7. Completude	Todas as questões da lista estão respondidas.	☐	☐	☐

Atividade 2 - Análise de caso de ensino em grupo

O principal propósito desta atividade avaliativa é compreender como os estudantes mobilizam seus conhecimentos matemáticos (CC) e conhecimentos pedagógicos de conteúdo (CPC) para analisar uma situação realista de sala de aula. A atividade propõe a análise de um caso de ensino em que um professor da educação básica enfrenta dificuldades para levar seus alunos a reconhecerem a necessidade da linguagem algébrica, uma vez que estes tendem a resolver os problemas apenas por meio de estratégias aritméticas.

A análise deve permitir que os participantes articulem conhecimentos conceituais sobre a linguagem algébrica, experiências como estudantes da educação básica e o **conhecimento pedagógico do conteúdo em desenvolvimento**, de modo a interpretar os desafios vivenciados pelo professor e pelos estudantes, bem como a propor encaminhamentos didáticos pertinentes.

Essa atividade está diretamente relacionada aos seguintes **objetivos**:

1 Explicar a noção de incógnita, reconhecendo sua presença em problemas aritméticos anteriores à introdução da linguagem algébrica.

3 Interpretar obstáculos e dificuldades dos estudantes na aprendizagem da álgebra das equações.

Caso para análise - "O x da questão de Alice"

> *Alice era uma professora iniciante. Pela primeira vez, ela lecionava para uma turma regular, substituindo a professora titular de matemática do 7º ano, que estava em licença-maternidade, em uma escola privada de classe média.*
>
> *A orientação deixada pela professora titular, com base no currículo da escola, era que Alice introduzisse a linguagem algébrica por meio da resolução de equações polinomiais do 1º grau.*
>
> *Alice decidiu que, para tornar o estudo das equações mais significativo, trabalharia com problemas contextualizados, como o que segue:*
>
> ***Numa corrida de táxi, cobra-se um valor fixo de R$ 4,60, chamado de "bandeirada", e mais R$ 0,96 por quilômetro rodado. Se o passageiro pagou R$ 19,00 pela corrida, quantos quilômetros ele percorreu?***

A professora usou exemplos como esse para mostrar que o valor desconhecido poderia ser representado por uma letra, geralmente x. Assim, nesse caso, x representaria a quantidade de quilômetros rodados. Passo a passo, Alice mostrou como representar a situação até chegar à equação:

$$4{,}60 + 0{,}96x = 19$$

Então, um aluno, Gabriel, levantou a mão e disse:

> ***— Prô, acho que entendi, mas era mais fácil tirar 4,60 de 19. Depois, era só ver quantos 0,96 cabem no que sobrou... Não precisa nada dessa complicação de x.***

Alice reconheceu que o problema realmente poderia ser resolvido dessa forma e explicou que, ao resolver a equação, estavam justamente sendo feitas essas mesmas operações — subtração e divisão. Houve, então, um "zum-zum-zum" na sala. Outra aluna, Elisa, comentou:

> ***— Eu entendi o que o Gabriel disse, mas não entendi nada desse negócio de x.***

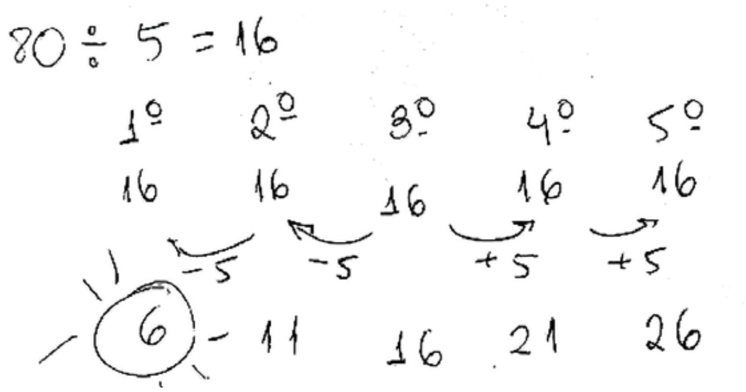
A professora procurou acalmar os alunos, dizendo que logo se acostumariam com essa nova forma de representar valores desconhecidos, e que as equações eram muito úteis em vários tipos de problemas, não apenas naqueles que eles já sabiam resolver.

Mas, como Alice constatou mais tarde, o discurso caiu no vazio. Diante da lista de problemas proposta por ela, a maioria dos estudantes tentou métodos aritméticos para resolver as questões — e, em geral, com êxito. Alguns poucos perguntaram a ela se tinha que "usar o x"; ela respondeu que sim. Entre esses, dois pareceram realmente compreender a lógica da representação algébrica e da resolução de equações. Os demais acabaram errando, ou na formulação das equações ou na manipulação da igualdade durante a resolução.

Alice ficou muito frustrada. Para ela, o uso de equações era um método prático e eficiente, e era difícil entender a resistência dos estudantes. Na verdade, ela nem sempre compreendia facilmente os métodos aritméticos usados por eles, mesmo quando estavam corretos.

Por exemplo, ela propôs o seguinte problema:

> ***Um esquilo coletou nozes durante cinco dias, de modo que, a cada dia, recolhia cinco a mais do que no dia anterior. No total, ele juntou 80 nozes. Quantas nozes ele coletou no primeiro dia?***

> *Para Alice, bastava montar a equação a seguir e depois resolvê-la:*
>
> $$x + (x + 5) + (x + 10) + (x + 15) + (x + 20) = 80$$
>
> *Mas os alunos usaram uma grande variedade de raciocínios, muito mais "confusos" para Alice. Uma aluna, Juliana, por exemplo, fez assim:*
>
> 
>
>
> *Depois de refletir sobre a solução de Juliana, Alice a achou bastante engenhosa, mas não soube o que fazer com aquilo... Para ela, parecia que a destreza matemática dos estudantes estava atrapalhando, em vez de ajudar, na aprendizagem do novo conteúdo.*

Roteiro de análise

Compreensão conceitual e epistemológica

- Como o caso ilustra a transição entre o pensamento aritmético e o algébrico?
- Que papel a linguagem algébrica (uso do **x**, construção da equação) desempenha nesse processo?
- Que tipo de compreensão os estudantes demonstram ter sobre números e operações, mesmo sem recorrer ao **x**?
- Quais concepções e modos de pensar se expressam nas soluções propostas por Gabriel e por Juliana?
- Que obstáculos epistemológicos — ligados à natureza do conhecimento algébrico — estão presentes no caso?

Interpretação pedagógica do caso

- Quais foram os principais desafios enfrentados por Alice?
- Que concepção de ensino de álgebra parece orientar suas escolhas?
- Como a professora reagiu às estratégias não algébricas dos alunos?
- Que papel teve sua própria compreensão do conteúdo na condução da aula?
- O que esse caso revela sobre o processo de mediação docente e sobre o lugar do erro e das estratégias espontâneas dos alunos?

Proposição de encaminhamentos didáticos

- Como Alice poderia ter valorizado as estratégias aritméticas dos alunos, transformando-as em ponto de partida para discutir a generalização?
- Que outras representações (tabelas, esquemas, gráficos, manipulação concreta, entre outras) poderiam ser utilizadas para apoiar a passagem ao simbólico?
- Como o professor pode ajudar os estudantes a compreender o significado do **x** sem impor mecanicamente o símbolo?
- De que maneira a exploração de regularidades e padrões pode favorecer essa transição?
- Que tipo de sequência didática ou situação-problema vocês proporiam para trabalhar esse mesmo tema de forma mais produtiva?

Forma da atividade

A atividade será realizada em sala de aula, em **grupos de três a cinco estudantes**. Vale considerar metodologias pertinentes para a organização e condução de trabalhos em equipe, visando a melhorar a qualidade do processo de colaboração entre os estudantes. Ver, por exemplo, o trabalho de Elizabeth Cohen e Rachael Lotan (2017).

Cada grupo receberá um **roteiro de análise com perguntas norteadoras**, que orientará a leitura e a discussão do caso. As reflexões deverão ser registradas de forma organizada e fundamentada, respondendo a todas as questões propostas no roteiro.

A **rubrica de avaliação** também deve ser apresentada e discutida previamente, para que os estudantes tenham clareza de como serão avaliados e possam empregar os melhores esforços em realizar o trabalho a contento.

Processo avaliativo

1. Autoavaliação

Cada grupo deve **utilizar a rubrica para revisar criticamente a própria análise**, identificando pontos fortes e aspectos que podem ser aprimorados antes da entrega. O foco não é atribuir uma "nota", mas **refletir sobre a qualidade do trabalho** à luz dos critérios definidos.

2. Avaliação por pares

A função desta etapa é promover o desenvolvimento de critérios compartilhados de qualidade e o aperfeiçoamento coletivo da análise.

Cada grupo receberá o trabalho de outro grupo, de forma anônima ou identificada conforme decisão do docente, e deverá **avaliá-lo utilizando a mesma rubrica**. A devolutiva deve ser feita usando a rubrica acompanhada de comentários extras, sempre que necessário. Tais comentários devem ser **específicos, respeitosos e construtivos**.

Após receber o retorno do grupo avaliador, cada equipe deve **analisar as sugestões recebidas** e decidir quais serão incorporadas antes da entrega final. Essa etapa deve ser registrada brevemente em um parágrafo reflexivo ao final do documento (por exemplo: "Com base nas devolutivas, revisamos..."). O docente deve **acompanhar e orientar o processo**, assegurando que as interações sejam éticas e focadas na aprendizagem. Pode selecionar trechos exemplares de comentários (positivos e críticos) para discutir coletivamente, destacando **o que caracteriza uma boa devolutiva entre pares**. Essa mediação é essencial para que a atividade cumpra sua função formativa, promovendo **autonomia, criticidade e colaboração acadêmica**. E, além disso, fornece aos futuros professores modelos de condução de avaliação entre pares.

3. Avaliação pelo docente

Após a entrega, o docente aplicará a mesma rubrica, observando tanto os aspectos conceituais (compreensão matemática e pedagógica do caso) quanto a clareza argumentativa e a pertinência das propostas apresentadas.

4. Evolutiva formativa

A devolutiva final será realizada por meio da rubrica comentada e de discussão coletiva, destacando avanços e pontos que merecem maior aprofundamento.

Rubrica

Dimensão	Descritor	Nível 4 – Excelente (0,5)	Nível 3 – Bom (0,4)	Nível 2 – Parcial (0,2)	Nível 1 – Inicial (0,0)
1. Compreensão conceitual e epistemológica (0,5 ponto)	Evidencia compreensão da natureza das equações e da função da linguagem algébrica na transição do pensamento aritmético ao algébrico.	Demonstra compreensão profunda das ideias envolvidas, analisando aspectos conceituais e epistemológicos com clareza e pertinência.	Compreende adequadamente a função da linguagem algébrica, ainda que com menor articulação conceitual ou epistemológica.	Menciona elementos conceituais de modo genérico ou incompleto, com pouca relação com o caso analisado.	Apresenta concepções equivocadas ou ausência de reflexão sobre a natureza da linguagem algébrica.
2. Interpretação pedagógica do caso (0,5 ponto)	Analisa os desafios enfrentados pelo professor e pelos estudantes, relacionando-os a obstáculos típicos da aprendizagem da álgebra.	Interpreta com profundidade as dificuldades do professor e dos estudantes, identificando causas e possíveis implicações didáticas.	Identifica adequadamente as dificuldades do professor e/ou dos estudantes, mas com explicações ainda descritivas ou sem aprofundamento teórico.	Aponta as dificuldades de modo superficial ou impreciso, sem articulação com a aprendizagem da álgebra.	Não identifica as dificuldades relevantes ou as interpreta de forma equivocada.
3. Proposição de encaminhamentos didáticos (0,5 ponto)	Apresenta propostas consistentes, criativas e fundamentadas para enfrentar as dificuldades identificadas.	Propõe encaminhamentos coerentes e adequados, fundamentando-os de forma satisfatória.	As propostas são pertinentes, mas pouco justificadas ou pouco articuladas à análise do caso.	As propostas são genéricas, vagas ou desconectadas das dificuldades identificadas.	Não apresenta encaminhamentos didáticos ou eles são inviáveis/incoerentes.
4. Clareza, estrutura e argumentação (0,5 ponto)	Organização e coesão do texto, articulação entre ideias e uso de evidências na argumentação.	O texto é muito bem estruturado, com argumentação lógica e articulada; ideias fluem com clareza e coerência.	O texto é claro e bem organizado, ainda que com pequenas falhas de coesão ou justificativas pontuais.	O texto apresenta organização parcial, com argumentos dispersos ou incompletos.	O texto é confuso, fragmentado ou carece de argumentação consistente.

Atividade 3 - Prova Individual com mapa de avanço coletivo

O principal propósito desta atividade avaliativa é analisar a compreensão individual dos estudantes sobre os diferentes métodos de resolução de equações polinomiais e sua capacidade de mobilizar esse conhecimento em contextos de ensino.

Dessa forma, a prova avalia simultaneamente o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo — ou seja, a habilidade de interpretar raciocínios de alunos, identificar obstáculos e propor intervenções didáticas coerentes.

A atividade é composta por duas etapas integradas:

- **Prova individual**, que combina aplicação de métodos resolutivos e análise de produções de alunos da educação básica;
- **Mapa de avanço coletivo**, etapa formativa posterior na qual o docente sistematiza as principais dificuldades observadas e propõe perguntas reflexivas que promovem avanço conceitual e didático.

A atividade está diretamente relacionada aos seguintes objetivos de aprendizagem:

4 **Aplicar diferentes métodos resolutivos para equações polinomiais, tais como isolamento da incógnita, fatoração, completamento de quadrados, fórmulas resolutivas, entre outros.**

6 **Interpretar resoluções de atividades de estudantes da educação básica sobre equações para subsidiar intervenções didáticas adequadas.**

7 **Compreender o desenvolvimento histórico da notação algébrica, analisando sua arbitrariedade e sua funcionalidade.**

Forma da atividade

A atividade será desenvolvida em **duas etapas complementares**:

1ª Etapa – Prova individual respondida em sala de aula

A prova conterá **questões que exigem tanto domínio do conteúdo quanto análise pedagógica**, organizadas em dois tipos principais:

- **Questões de aplicação conceitual**, que requerem o uso de diferentes métodos resolutivos (isolamento, fatoração, completamento de quadrados, fórmulas resolutivas, entre outros), com justificativas que explicitem o raciocínio empregado.
- **Questões de análise didática**, nas quais o estudante deverá interpretar resoluções de alunos da educação básica, identificar erros ou estratégias implícitas e propor intervenções pedagógicas adequadas à situação.

Exemplo A: *“A figura a seguir mostra a resolução de um estudante. Note que ele errou ao tentar encontrar as soluções da equação quadrática $x^2 + 8x - 48 = 0$. Explique qual foi o erro (ou erros).”*

$$x^2+8x-48=0$$
$$(x+24)(x-2)=0$$
$$x+24=0 \text{ or } x-2=0$$
$$\quad -24 \quad -24 \qquad\quad +2 \quad +2$$
$$x=-24 \text{ or } x=2$$

Exemplo B: *“Um estudante, ao resolver a equação quadrática $(x - 3)(x - 4) = 2$, encontrou que as raízes são $x = 5$ ou $x = 6$. Explique como ele deve ter resolvido a equação para ter obtido essas raízes.”*

A estrutura da prova visa observar como o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo se articulam nas respostas.

2ª Etapa – Mapa de avanço coletivo

Após a correção, o docente construirá um **mapa de avanço** com base nas principais dificuldades da turma. O mapa conterá, para cada item da prova: a **dificuldade observada** e uma ou mais **perguntas de avanço** (reflexivas, de esclarecimento ou de aprofundamento).

Exemplo:

Item da prova	Dificuldades e padrões observados	Pergunta(s) de avanço
Exemplo: Questão 4 – Interpretação de resolução de aluno	Vários estudantes apontaram o erro, mas não propuseram intervenção	Como você explicaria essa situação a um aluno de 8º ano? Que recurso visual ou exemplo poderia apoiar sua compreensão?

Todos os estudantes deverão responder a todas as perguntas do mapa de avanço, **independentemente do desempenho obtido na prova**. O foco não é refazer ou corrigir o item original da prova, mas sim reconstruir o raciocínio e fortalecer a compreensão conceitual e pedagógica.

Processo avaliativo e atribuição de notas

Prova individual (2,0 pontos)

A correção considerará dois eixos complementares:

- **Eixo conceitual:** precisão dos procedimentos algébricos e justificativas matemáticas;
- **Eixo pedagógico:** qualidade da interpretação das resoluções de alunos e pertinência das intervenções propostas.

A nota será atribuída por **pontuação proporcional (regra de três simples)**.

Mapa de avanço coletivo (1,0 ponto)

Após a correção, o docente construirá um **mapa de avanço** com base nas principais dificuldades da turma. Todos os estudantes deverão responder a essas perguntas, **independentemente do desempenho obtido na prova**.

O professor analisará as respostas de forma **global**, atribuindo pontuação conforme o engajamento e a qualidade das reflexões:

- **1,0 ponto** – Respostas completas, articuladas e reflexivas.
- **0,5 ponto** – Respostas incompletas ou genéricas.
- **0 ponto** – Não participação.

Devolutiva e fechamento formativo

Após a entrega das respostas, o docente apresentará uma **síntese coletiva dos avanços observados**, retomando as ideias mais significativas e as dúvidas persistentes. Essa devolutiva encerra o ciclo da atividade, garantindo **retorno sobre o mapa** sem abrir uma nova rodada de tarefas. O fechamento poderá ocorrer por meio de **discussão em aula** ou **síntese escrita**, valorizando a aprendizagem coletiva.

Atividade 4 - Organizador gráfico em grupo

O principal propósito desta atividade avaliativa é verificar a compreensão integrada dos métodos históricos de representação e solução de equações polinomiais, evidenciando como diferentes civilizações e períodos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da linguagem algébrica e das técnicas resolutivas.

Por meio da elaboração de um organizador gráfico, os estudantes deverão sintetizar visualmente os principais métodos históricos de representação e solução de equações polinomiais, evidenciando semelhanças, diferenças e conexões entre eles. Espera-se que articulem aspectos epistemológicos, históricos e simbólicos, compreendendo como a linguagem algébrica emergiu, se transformou e se consolidou ao longo do tempo.

A atividade está diretamente relacionada aos seguintes objetivos de aprendizagem:

4 **Reconhecer, em diferentes culturas e tempos históricos, as práticas e as formas de representação de incógnitas e equações polinomiais, incluindo os avanços ocorridos nos séculos XV e XVI.**

6 **Aplicar diferentes métodos resolutivos para equações polinomiais, tais como isolamento da incógnita, fatoração, completamento de quadrados, fórmulas resolutivas, entre outros.**

7 **Compreender o desenvolvimento histórico da notação algébrica, analisando sua arbitrariedade e sua funcionalidade.**

Forma da atividade

A atividade será realizada em grupos de 3 a 5 estudantes, a partir de pesquisa orientada e das discussões coletivas realizadas nas aulas. O trabalho poderá ser realizado em aula ou não, a depender do contexto do curso (diurno, noturno, com estrutura e insumos para esse tipo de atividade ou não, entre outros). Cada grupo deverá elaborar um organizador gráfico (por exemplo: linha do tempo, mapa conceitual, diagrama comparativo ou infográfico) que apresente:

- As formas históricas de representar incógnitas e operações;
- Os métodos de resolução empregados em diferentes períodos e culturas;
- As conexões entre essas abordagens e o pensamento algébrico contemporâneo.

O organizador deve ser autoexplicativo e visualmente claro, podendo ser produzido em formato digital ou manual, conforme a orientação do docente.

Após a produção, haverá uma exposição dos trabalhos, na qual cada grupo deverá formular ao menos duas perguntas dirigidas aos demais, relacionadas a dúvidas, curiosidades ou possibilidades de aprofundamento sobre o tema. O formato de entrega dessas perguntas pode variar caso a exposição seja física ou digital, recorrendo a *post-its* ou a comentários em um mural virtual, por exemplo.

Processo avaliativo

1. Autoavaliação em grupo

Antes da entrega e da exposição, cada grupo deverá utilizar o *checklist* **avaliativo** para revisar seu próprio trabalho. O *checklist* orienta os estudantes sobre **os elementos essenciais do organizador gráfico**, favorecendo a revisão da completude, coerência conceitual e clareza visual. Essa etapa tem caráter **formativo e reflexivo**, ajudando o grupo a identificar o que já domina e o que pode aprimorar.

2. Entrega e exposição

Cada grupo entregará o organizador gráfico final e participará da **exposição coletiva**. Durante a apresentação, os grupos deverão **explicar suas escolhas** e destacar os **métodos históricos, representações e conexões conceituais** evidenciadas. Ao final, cada grupo deverá **deixar ao menos duas perguntas** dirigidas aos demais para dúvidas, curiosidades ou possíveis aprofundamentos.

Avaliação e devolutiva docente

Após a exposição, o docente utilizará o *checklist* (e suas anotações feitas durante a exposição) para elaborar uma devolutiva formativa, nas duas formas complementares seguintes:

- Comentário coletivo, destacando boas práticas observadas (organização visual, consistência conceitual, perguntas instigantes) e aspectos a aprofundar;
- *Checklist* preenchido, indicando pontos fortes e oportunidades de refinamento conceitual e comunicativo.

4. Atribuição de notas

Entrega completa, conforme *checklist*.	**2,0 pontos**
Entrega parcial ou com algum desacordo em relação ao *checklist*.	**1,0 ponto**
Atividade não entregue.	**0 ponto**

Checklist

Critério	Descrição	Sim	Parcial	Não
1. Clareza visual e organização	As informações estão dispostas de forma legível, com hierarquia visual e elementos gráficos que facilitam a leitura e compreensão.	☐	☐	☐
2. Representações históricas e culturais	O trabalho contempla **diferentes culturas e períodos históricos**, reconhecendo avanços e mudanças na forma de representar incógnitas e operações.	☐	☐	☐
3. Métodos resolutivos	São apresentados **métodos variados** de resolução de equações (exemplo: geométricos, aritméticos, simbólicos, algébricos) com breve explicação de seu funcionamento.	☐	☐	☐
4. Conexões conceituais	O organizador estabelece **relações entre métodos históricos e conceitos atuais**, indicando continuidades ou rupturas relevantes.	☐	☐	☐
5. Notação e linguagem algébrica	Evidencia o **desenvolvimento da notação algébrica.**	☐	☐	☐
6. Perguntas para o debate (Apenas após exposição e debate coletivo.)	Foram elaboradas **duas ou mais perguntas** instigantes para os demais grupos, ligadas a dúvidas, curiosidades ou aprofundamentos conceituais.	☐	☐	☐

Atividade 5 - Elaboração de plano de atividade didática em duplas

O principal propósito desta atividade avaliativa é **planejar e justificar uma proposta de ensino** voltada à introdução ou à ilustração de um **método resolutivo específico** para equações polinomiais. Nesse processo, busca-se evidenciar a articulação entre o **conhecimento do conteúdo matemático** (CC) e o **conhecimento pedagógico do conteúdo (CPC)**.

A atividade desafia o futuro professor a **tomar decisões didáticas fundamentadas**, demonstrando capacidade de selecionar tarefas adequadas, antecipar dificuldades dos alunos, propor intervenções coerentes e organizar uma sequência que favoreça a aprendizagem ativa. Além do planejamento em si, espera-se que a dupla demonstre **clareza sobre os objetivos de aprendizagem**, **pertinência da escolha do método resolutivo** e **consistência entre as justificativas e as resoluções esperadas**.

A atividade está diretamente relacionada aos seguintes objetivos de aprendizagem:

3 Reconhecer obstáculos e dificuldades dos estudantes na aprendizagem da álgebra das equações descritos na literatura especializada.

5 Selecionar ou produzir exemplos e atividades para ensinar métodos de resolução de equações.

Forma da atividade

Cada dupla deverá escolher (ou sortear), a partir de uma lista de possibilidades fornecida pelo docente, um **método resolutivo específico** (exemplo: isolamento da incógnita, fatoração, completamento de quadrados, fórmulas resolutivas, entre outros). Então, deve selecionar ou elaborar **uma atividade** que permita introduzir tal método.

O trabalho deve conter:

1. **Título e objetivo da atividade**;
2. **Justificativa didática**, explicitando a escolha do conteúdo, o propósito pedagógico e a relevância para o desenvolvimento do pensamento algébrico;
3. **Localização na progressão curricular**, indicando **em que momento ou etapa escolar o método resolutivo é introduzido** e **por que esse é um ponto adequado** para a aprendizagem — considerando o desenvolvimento conceitual prévio dos alunos e as expectativas da BNCC ou do currículo de referência;
4. **Descrição detalhada da proposta com:**
   - o **enunciado da atividade** e o **conjunto de tarefas destinadas aos alunos** (situações-problema, desafios, discussões, investigações, entre outros);
   - o **papel do professor** durante o desenvolvimento (mediações, perguntas, encaminhamentos e intervenções planejadas);
   - a **organização cronológica** das etapas e a **organização da turma** (trabalho individual, em duplas, em grupos, discussão coletiva, entre outras);
   - os **materiais e recursos necessários**, bem como o **tempo estimado** para cada fase da atividade.
5. **Resoluções esperadas**, com comentários sobre os raciocínios matemáticos mobilizados;
6. **Antecipação de erros e dificuldades** dos alunos, com possíveis **intervenções pedagógicas** adequadas;
7. **Encaminhamentos complementares** (variações, extensões, conexões interdisciplinares ou de aprofundamento).

As produções comporão um repositório coletivo, que funcionará como mostra de planos de aula, favorecendo o intercâmbio entre duplas.

Processo avaliativo

Avaliação entre pares (formativa)

Cada dupla realizará uma **leitura crítica do plano de outra dupla**, utilizando a **rubrica** oficial da atividade como guia. Essa etapa visa **exercitar o olhar avaliativo e analítico**, favorecendo a compreensão de diferentes formas de estruturar o ensino dos métodos resolutivos.

Os comentários deverão ser **específicos, respeitosos e fundamentados**, destacando pontos fortes e sugestões de melhoria.

As duplas podem usar o *feedback* dos colegas para fazer **refinamentos antes da entrega para o professor**.

Entrega e avaliação docente (2,0 pontos)

Após a revisão, as duplas entregarão a **versão final do plano**, avaliada pelo docente com base na mesma **rubrica** utilizada na avaliação entre pares. A atribuição de notas também será de acordo com essa rubrica.

Devolutiva formativa e encerramento

O docente apresentará uma **devolutiva geral**, destacando tendências observadas (boas escolhas didáticas, coerência curricular, adequação das intervenções, variações criativas, entre outras). Poderá também **ilustrar o** *feedback* **coletivo** com trechos exemplares de planos ou soluções criativas, de forma breve e dialogada.

Os planos permanecerão disponíveis no **mural coletivo**, constituindo um **repositório de referências** para o grupo.

97

Rubrica

Dimensão Avaliada	Nível 4 – Excelente	Nível 3 – Bom	Nível 2 – Parcial	Nível 1 – Inicial
1. Coerência entre objetivo, conteúdo e método resolutivo	O objetivo de aprendizagem é claro, específico e coerente com o método resolutivo escolhido; a justificativa demonstra compreensão profunda da finalidade conceitual e didática da atividade.	O objetivo é claro e compatível com o método resolutivo, ainda que com justificativa parcial.	O objetivo está presente, mas é genérico ou apenas parcialmente coerente com o método resolutivo.	O objetivo é ausente, vago ou desconectado do conteúdo e do método resolutivo.
2. Localização na progressão curricular e justificativa	Identifica com precisão o momento adequado para introdução do método na progressão curricular, apresentando justificativa consistente e articulada a aprendizagens anteriores.	Localiza corretamente o conteúdo na progressão, com justificativa geral ou pouco detalhada.	Localização genérica ou justificativa frágil, sem conexão explícita com a progressão.	Não há referência à progressão curricular ou a justificativa é inadequada.
3. Estratégias didáticas e participação dos alunos	A proposta inclui tarefas bem estruturadas, que promovem participação ativa dos alunos (exploração, discussão, resolução de problemas). As intervenções do professor são pertinentes e favorecem a construção de sentido.	As tarefas são adequadas e envolvem alguma participação ativa, ainda que com momentos predominantemente expositivos. As intervenções do professor são relevantes, mas pouco detalhadas.	As tarefas priorizam exposição ou repetição de procedimentos; há pouca clareza sobre o papel do aluno ou do professor no processo de aprendizagem.	A proposta é exclusivamente expositiva e centrada no professor, sem atividades ou intervenções que envolvam os alunos.
4. Antecipação de erros e estratégias de intervenção	Antecipação realista e variada de possíveis erros e dificuldades dos alunos, acompanhada de intervenções bem fundamentadas e específicas.	Apresenta alguns erros esperados e estratégias de intervenção adequadas, mas genéricas.	Antecipação superficial ou genérica, sem detalhamento das respostas pedagógicas.	Não antecipa erros ou apresenta respostas inadequadas às dificuldades possíveis.
5. Clareza e organização comunicativa do plano	O texto é claro, bem estruturado e coeso. A descrição das etapas, materiais e organização da turma é completa e facilita a compreensão da proposta.	O texto é compreensível e relativamente bem organizado, ainda que com pequenas lacunas ou repetições.	O texto apresenta trechos confusos, lacunas importantes ou organização pouco lógica.	O texto é desorganizado ou incompleto, dificultando a compreensão da proposta.

Referências bibliográficas

Lista de textos sugeridos para a disciplina:

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. *In*: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-36.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

KIERAN, Carolyn. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. *In*: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 104-110.

SOUZA, Eliane Reame de; DINIZ, Maria Ignez de S. V. Álgebra: das variáveis às equações e funções. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2008.

Referências para produção deste programa e para a elaboração de aulas

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (org.). **As idéias da álgebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

HERSCOVICS, Nicolas; KIERAN, Carolyn. Constructing meaning for the concept of equation. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 8, n. 4, p. 341–358, 1977. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/pdf/27962179.pdf. Acesso em: 10 nov. 2025.

HODGEN, Jeremy; FOSTER, Colin. **What's so hard about algebra?** [S. l.]: University of Nottingham, 2013. Disponível em: https://www.foster77.co.uk/Hodgen%20&%20Foster,%20What's%20so%20hard%20about%20algebra.pdf. Acesso em: 10 nov. 2025.

KIERAN, Carolyn. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 12, n. 3, p. 317–326, 1981. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/pdf/3482333.pdf. Acesso em: 10 nov. 2025.

LIMA, Gabriel Loureiro de; BIANCHINI, Barbara Lutaif. Reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra a partir das produções do GT04 da SBEM. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 38, e24723, 2022. Disponível em: https://www.scielo.br/j/edur/a/SdTvr9PMcp9zTXf4kLRfNKv/?lang=pt. Acesso em: 10 nov. 2025.

M3 MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. **Esse tal de Bhaskara**. [S. l.: s. n.], 2012. 1 vídeo (10 min). Publicado pelo canal M3 Matemática Multimídia. Disponível em: https://youtu.be/pozKHQxvFSo?si=r6rBT82lCLryrLKE. Acesso em: 10 nov. 2025.

M3 MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. **Segredos, Intrigas e Equações Cúbicas**. Campinas: UNICAMP, [s.d.]. Áudio. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1278. Acesso em: 14 nov. 2025.

MASON, John; GRAHAM, Alan; JOHNSTON-WILDER, Sue. **Developing thinking in algebra**. London: The Open University; Paul Chapman Publishing, 2005. 324 p.

MATHEMATICS ASSESSMENT PROJECT (MAP). **Interpreting equations**. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, 2015. Disponível em: https://www.map.mathshell.org/lessons.php?unit=6215&collection=8. Acesso em: 10 nov. 2025.

NATIONAL CENTRE FOR EXCELLENCE IN THE TEACHING OF MATHEMATICS (NCETM). **Algebra tiles**: representations of algebraic expressions. [S. l.]: NCETM, [s.d.]. Disponível em: https://www.ncetm.org.uk/media/dj5o223w/ncetm_ks3_representations_algebra_tilespdf.pdf. Acesso em: 10 nov. 2025.

PORTA DOS FUNDOS. **Romanos**. [S. l.: s. n.], 2014. 1 vídeo (2 min). Publicado pelo canal Porta dos Fundos. Disponível em: https://youtu.be/2vzwOeY9YUY?si=a4WxW6eSdOGxFnQF. Acesso em: 10 nov. 2025.

STRATEGIC EDUCATION RESEARCH PARTNERSHIP (SERP). **Algebra by Example**. [S. l.]: SERP Institute, [s.d.]. Disponível em: https://www.serpinstitute.org/algebra-by-example. Acesso em: 10 nov. 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO (UFRJ). Projeto Fundão. **Álgebra**: material do professor. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, [s.d.]. Disponível em: https://www.im.ufrj.br/images/documentos/lgebra.pdf. Acesso em: 10 nov. 2025.

UNIDADE 1

A transição entre a aritmética e a álgebra: sentidos e desafios do ensino

A unidade tem início com um diagnóstico do repertório aritmético e algébrico dos futuros professores, a partir da resolução de problemas que admitem diferentes modos de solução. Esse ponto de partida serve para provocar a reflexão sobre os próprios modos de pensar matematicamente e sobre os desafios que estudantes da educação básica enfrentam ao transitar entre a aritmética e a álgebra. Ao longo do percurso, os participantes analisam distintos significados da álgebra — como aritmética generalizada, meio de resolução de problemas, estudo de relações e de estruturas — e discutem referenciais teóricos, documentos curriculares (como a BNCC) e casos de sala de aula. O foco recai sobre a compreensão conceitual e didática da introdução da linguagem algébrica, culminando na análise de um caso real que evidencia as tensões entre raciocínio aritmético e pensamento algébrico.

Aula 1 - Diagnóstico inicial: modos de pensar aritméticos e algébricos

Objetivos: apresentar o curso, explicitar expectativas e mapear o repertório matemático dos licenciandos.

Atividades

- Apresentação da ementa e dos objetivos da unidade.
- Atividade 1 – Diagnóstico: resolução de problemas com dupla abordagem (aritmética e algébrica), visando identificar estratégias, preferências e concepções implícitas sobre o uso da álgebra.

Aula 2 - O que é álgebra? Concepções e representações iniciais

Objetivos: discutir concepções pessoais sobre álgebra e introduzir a reflexão sobre seus múltiplos significados.

Atividades

- Devolutiva e discussão coletiva do diagnóstico inicial.
- Dinâmica "Pense, divida com a dupla, compartilhe com o grupo": o que significa álgebra para você?
- Exibição e debate do vídeo "Romanos" (Porta dos Fundos, 2014) como provocação sobre o uso simbólico da letra x.

Aula 3 - Os diferentes significados da álgebra

Objetivos: reconhecer e analisar os diversos significados atribuídos à álgebra na literatura especializada e nas práticas escolares.

Atividades

- Proposição e discussão de quatro situações-problema que explorem diferentes ideias de álgebra (com base em Mason et al., 2005).
- Leitura guiada das páginas 1 a 10 do livro "Álgebra: das variáveis às equações e funções" (Souza e Diniz, 2008).
- Sistematização dos quatro significados principais: aritmética generalizada; meio de resolução de problemas; estudo de relações entre variáveis; estudo de estruturas algébricas.

Aula 4 - A álgebra na BNCC: progressões e escolhas curriculares

Objetivos: compreender como os diferentes significados da álgebra se distribuem e evoluem ao longo da BNCC.

Atividades:

- Estudo da BNCC com foco nas habilidades relativas à álgebra (anos iniciais e finais do ensino fundamental).
- Rastreamento da progressão das aprendizagens e habilidades.
- Discussão coletiva orientada pelas perguntas: "Como é essa progressão? Por que é assim? Poderia ser de outra forma?"

Aula 5 – Sistematização e transição para o estudo das equações

Objetivos: consolidar os aprendizados sobre os significados da álgebra e introduzir a discussão sobre o início do estudo das equações.

Atividades:

- Exposição dialogada e síntese produzida pelos futuros professores, articulando conceitos e práticas estudadas.

Questão norteadora:

- "Quando e como se inicia o estudo das equações?"
- Construção coletiva de uma linha de progressão didática para introdução da linguagem algébrica.

Aula 6 – Análise de caso de ensino: a introdução da linguagem algébrica (parte 1)

Objetivos: compreender como os licenciandos mobilizam seus conhecimentos conceituais (CC) e pedagógicos do conteúdo (CPC) para analisar uma situação real de sala de aula em que o professor enfrenta dificuldades para levar os alunos a reconhecerem a necessidade da linguagem algébrica.

Atividades:

- Apresentação da "Atividade 2 – Análise de caso de ensino": contextualização do caso "O x da questão de Alice", esclarecimento dos objetivos da análise e leitura coletiva dos critérios da rubrica avaliativa.
- Formação de grupos de três a cinco participantes.
- Distribuição do roteiro de análise, com perguntas norteadoras para orientar a leitura e discussão do caso.
- Início do trabalho em grupo: leitura, debate e registro das interpretações preliminares.

Aula 7 - Análise de caso de ensino: socialização, avaliação e devolutiva formativa (parte 2)

Objetivos: promover a revisão crítica e o aprimoramento colaborativo das análises de caso, por meio da autoavaliação e da avaliação por pares, e consolidar os aprendizados conceituais e pedagógicos da unidade.

Atividades:

- Autoavaliação dos grupos: revisão crítica do próprio trabalho utilizando a rubrica, identificando pontos fortes e aspectos a aprimorar.
- Discussão coletiva mediada pelo docente sobre o processo de devolutiva entre pares: o que caracteriza uma boa crítica acadêmica e como ela contribui para o aprimoramento profissional.
- Avaliação por pares: troca dos trabalhos entre grupos, leitura e preenchimento da rubrica com comentários construtivos e específicos.
- Revisão final dos trabalhos pelos grupos, incorporando as sugestões consideradas pertinentes e registrando brevemente as modificações realizadas.
- Entrega final da análise.

Aula 8 – Devolutiva docente e síntese formativa da unidade

Objetivos: oferecer uma devolutiva formativa sobre a "Atividade 2", destacando avanços conceituais, pedagógicos e argumentativos observados nos trabalhos. Promover a reflexão coletiva sobre os aprendizados desenvolvidos ao longo da unidade.

Atividades:

- Apresentação da devolutiva docente: o professor retoma os principais aspectos observados na avaliação das análises de caso, com base na rubrica, enfatizando tanto os pontos fortes quanto os pontos que merecem maior aprofundamento.
- Exposição de exemplos extraídos dos trabalhos (mantendo o anonimato quando necessário), evidenciando boas práticas de argumentação, de articulação entre CC e CPC e de proposição de encaminhamentos didáticos.
- Sistematização dos aprendizados-chave da unidade, relacionando-os aos objetivos gerais do curso.

UNIDADE 2

Métodos históricos e fundamentos didáticos das equações

Nesta unidade, os futuros professores percorrem um itinerário histórico e conceitual sobre os métodos de resolução de equações, desde a álgebra retórica até a notação simbólica contemporânea, articulando continuamente os fundamentos matemáticos e suas implicações didáticas. Por meio de atividades de experimentação, investigação e análise, os estudantes exploram como diferentes culturas e períodos representaram incógnitas e operações, compreendendo que cada método reflete uma forma de pensar e de comunicar ideias matemáticas. Essa imersão histórica é entrelaçada a discussões sobre a transposição didática dos métodos e suas conexões com o ensino atual, permitindo que os licenciandos mobilizem conhecimentos matemáticos e pedagógicos do conteúdo em situações de ensino. A unidade culmina em duas atividades integradoras — a prova em duas fases e a elaboração de um organizador gráfico — que promovem síntese, reflexão e autorregulação da aprendizagem, consolidando uma visão ampla e crítica sobre o desenvolvimento histórico, epistemológico e pedagógico da álgebra e das equações.

Aula 9 - Equações faladas: a álgebra retórica

Objetivos: experimentar e compreender a natureza das “equações faladas” e o raciocínio retórico da álgebra antiga.

Atividades:

- Experimentação com situações-problema expressas verbalmente, sem notação simbólica.
- Investigação do alcance e das limitações desse modo de expressão.
- Conexões com a matemática escolar: reinterpretação de problemas por meio da “regra de inversão”, articulando linguagem natural e pensamento algébrico emergente.

Aula 10 – O método do montão: raciocínios proporcionais na resolução de problemas

Objetivos: investigar o método do montão como técnica pré-algébrica e explorar seu potencial didático.

Atividades:

- Experimentação de problemas resolvidos pelo método do montão.
- Discussão sobre sua fundamentação em raciocínios proporcionais e balanceamento de quantidades.
- Conexões com o ensino de proporcionalidade e construção de sentido para o uso de letras e incógnitas.

Aula 11 – Métodos geométricos de resolução

Objetivos: compreender a base geométrica de certos métodos históricos de resolução de equações e identificar suas relações com o pensamento algébrico.

Atividades:

- Apresentação e experimentação de métodos geométricos elementares (sem necessidade de construções completas).
- Análise das propriedades envolvidas e sua correspondência com expressões algébricas.

Aula 12 – Completar quadrados: uma ponte entre geometria e álgebra

Objetivos: compreender o método de completar quadrados como transição entre raciocínios geométricos e simbólicos.

Atividades:

- Experimentação e análise do método.
- Investigação do alcance e limites dessa estratégia em diferentes tipos de equação.
- Conexões com a matemática escolar: relação com a fórmula resolutiva da equação quadrática e com a representação geométrica de áreas.

Aula 13 – O surgimento da notação algébrica

Objetivos: compreender a evolução histórica da notação algébrica e suas implicações para o ensino e a aprendizagem da álgebra.

Atividades:

- Linha do tempo da transição da álgebra retórica à simbólica.
- Discussão sobre como a notação transformou a natureza da atividade matemática.
- Debate sobre os efeitos dessa mudança na aprendizagem contemporânea e na transição aritmética →álgebrica.
- Exibição e debate do vídeo “Esse tal de Bhaskara” (M3 Matemática Multimídia, 2012) oferece uma revisão como fechamento dos temas propostos até aqui nessa unidade.

Aula 14 – Métodos baseados na notação algébrica: isolamento da incógnita

Objetivos: analisar o isolamento da incógnita como método fundamental de resolução e como objeto de ensino.

Atividades:

- Experimentação de problemas resolvidos por isolamento.
- Fundamentação conceitual do método (equivalência e operações inversas).
- Discussão de estratégias de ensino: como apoiar a passagem do raciocínio aritmético à manipulação simbólica (problematização do “passa para o outro lado”)

Aula 15 – Métodos baseados na notação algébrica: fatoração

Objetivos: compreender a fatoração como método resolutivo e discutir suas implicações didáticas.

Atividades:

- Revisão conceitual de fatoração.
- Resolução e análise de equações por esse método.
- Discussão sobre a articulação entre manipulação simbólica, visualização geométrica e compreensão estrutural.

Aula 16 – Equações polinomiais de grau maior que 3: história e impossibilidades

Objetivos: conhecer os esforços históricos na busca por soluções gerais de equações de grau superior e suas consequências para a compreensão da álgebra moderna.

Atividades:

- Panorama histórico das equações cúbicas e quárticas, e do surgimento da impossibilidade algébrica geral.
- Discussão sobre o impacto desses resultados no pensamento matemático e no ensino da álgebra.
- Apresentação e debate do áudio “Segredos, Intrigas e Equações Cúbicas” (M3 Matemática Multimídia, [s.d.]).

Unidade 2 – Continuação

Aula 17 – Atividade 3: Prova (fase 1)

Objetivos: avaliar a compreensão individual dos estudantes sobre os métodos de resolução de equações polinomiais e sua capacidade de mobilizar esse conhecimento em contextos de ensino.

Atividades:

- Prova individual: combinação entre aplicação de métodos resolutivos e análise de produções de alunos da educação básica.

Foco avaliativo:

- Compreensão conceitual dos diferentes métodos e mobilização integrada do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo (CPC).

Aula 18 – Atividade 3: Prova (fase 2)

Objetivos: promover o avanço conceitual e didático a partir da análise coletiva dos resultados da prova.

Atividades:

- Sistematização pelo docente das principais dificuldades e avanços observados.
- Discussão em grupos das perguntas reflexivas propostas no "mapa de avanço coletivo".
- Elaboração das respostas do grupo, consolidando novas compreensões sobre os métodos resolutivos e sua transposição didática.

Aula 19 – Devolutiva final da prova

Objetivos: socializar os resultados e aprendizagens da atividade avaliativa, promovendo a reflexão sobre o processo formativo.

Atividades:

- Apresentação pelo docente da síntese coletiva dos avanços e dúvidas persistentes.
- Discussão sobre o que as análises revelam acerca da compreensão dos métodos e das estratégias de ensino.
- Encerramento da atividade avaliativa com devolutiva dialógica e registro dos aprendizados individuais.

Aula 20 – Atividade 4: Elaboração de organizador gráfico

Objetivos: sistematizar os conhecimentos construídos sobre os diferentes métodos de resolução de equações e suas conexões históricas e didáticas.

Atividades:

- Formação de grupos (3 a 5 integrantes) e retomada das discussões realizadas ao longo da unidade sobre formas históricas de representar incógnitas e operações, métodos resolutivos e suas conexões com o pensamento algébrico contemporâneo.
- Orientações do docente sobre tipos possíveis de organizadores gráficos (linha do tempo, mapa conceitual, diagrama comparativo, infográfico).
- Produção do organizador, em formato digital ou manual, com base em pesquisa orientada e discussões coletivas.
- Autoavaliação em grupo, com apoio do checklist avaliativo, para revisar completude, coerência conceitual e clareza visual.

Aula 21 - Atividade 4: exposição e devolutiva formativa dos organizadores gráficos

Objetivos: promover a socialização das produções e o diálogo entre grupos sobre os métodos históricos, representações e conexões conceituais da álgebra. Valorizar a comunicação acadêmica e a argumentação visual como formas de explicitação do pensamento matemático.

Atividades:

- Exposição coletiva dos organizadores gráficos:
- Cada grupo apresenta seu trabalho, explica as escolhas de representação e destaca as relações entre aspectos históricos, conceituais e didáticos.
- Troca entre pares: cada grupo formula e registra ao menos duas perguntas dirigidas aos demais para dúvidas, curiosidades ou possibilidades de aprofundamento.
- O formato das perguntas pode variar conforme o contexto (*post-its*, mural físico ou virtual).

Devolutiva docente:

- Comentário coletivo com destaque a boas práticas (organização visual, consistência conceitual, perguntas instigantes) e aspectos a aprofundar.
- Entrega do checklist preenchido com observações formativas.

UNIDADE 3

Obstáculos, práticas e planejamento do ensino de equações

Na terceira unidade, os futuros professores avançam da análise conceitual e histórica para o enfrentamento de desafios concretos do ensino da álgebra. O percurso inicia com o estudo das formas de resolução de equações lineares e a distinção entre raciocínios baseados em inversão e em equivalência, aprofundando a compreensão das operações e de sua função estrutural. Em seguida, por meio de leituras e análises de produções de alunos, os participantes investigam as dificuldades recorrentes na aprendizagem da álgebra. A partir dessas discussões, o foco se desloca para o planejamento de ensino, com a elaboração e análise de planos de aula que evidenciam a articulação entre o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo. O processo formativo privilegia a reflexão colaborativa, a avaliação entre pares e a devolutiva docente, culminando em uma síntese coletiva sobre o que significa ensinar álgebra de modo conceitualmente fundamentado, didaticamente intencional e sensível às dificuldades reais dos estudantes.

Aula 22 – Categorização de soluções de equações lineares: inversão e equivalência

Objetivos: compreender as diferentes categorias de raciocínio envolvidas na resolução de equações lineares e discutir seus fundamentos conceituais.

Atividades:

- Análise e categorização de estratégias de resolução: regra de inversão versus manutenção de equivalência.
- Leitura guiada e discussão do capítulo 9 do livro "As ideias da álgebra" (Coxford e Shulte, 1995).

Foco formativo: aprofundamento conceitual sobre a lógica das operações inversas e o papel das propriedades da igualdade na formação do pensamento algébrico.

Aula 23 – Dificuldades dos estudantes com álgebra: o que dizem as pesquisas

Objetivos: identificar e compreender os principais obstáculos enfrentados pelos estudantes na aprendizagem da álgebra, relacionando-os a aspectos do raciocínio aritmético.

Atividades:

- Leitura e discussão do artigo "*What's so hard about algebra*?" (Hodgen e Foster, 2013).
- Sistematização coletiva das principais dificuldades relatadas.

Foco formativo: reconhecimento de padrões de erro e suas causas epistemológicas, cognitivas e didáticas, com vistas à formação do olhar analítico sobre o aprendizado da álgebra.

Aula 24 – Análise de erros e produções de alunos: equação quadrática

Objetivos: analisar raciocínios e erros típicos em produções de estudantes da educação básica envolvendo equações quadráticas.

Atividades:

- Resolução e análise da atividade "*Interpreting equations*" (Mathematics Assessment Project, 2015)
- Discussão em grupos sobre as estratégias corretas, as concepções implícitas nos erros e as possibilidades de intervenção docente.

Foco formativo: desenvolvimento da competência de leitura e interpretação de produções de alunos, articulando compreensão conceitual e planejamento pedagógico.

Aula 25 – Fechamento da análise de erros e síntese coletiva

Objetivos: retomar e consolidar os aprendizados das aulas anteriores sobre dificuldades e raciocínios dos estudantes.

Atividades:

- Socialização das observações registradas na aula anterior.
- Discussão orientada sobre os tipos de obstáculos identificados (semântico, procedimental, representacional).
- Sistematização final: implicações para o ensino de equações e para o planejamento de intervenções didáticas.

Foco formativo: elaboração de um quadro interpretativo das dificuldades, servindo de base conceitual para a próxima atividade avaliativa (planejamento de ensino).

Aula 26 – Orientações para a "Atividade 5": elaboração de plano de aula

Objetivos: compreender a proposta, os critérios e a rubrica da atividade avaliativa sobre planejamento de ensino.

Atividades:

- Apresentação e discussão da "Atividade 5 – Elaboração de plano de aula" e de sua rubrica de avaliação.
- Análise coletiva de exemplos à luz da rubrica de avaliação proposta.
- Organização das duplas e escolha ou sorteio do método resolutivo (exemplo: isolamento, fatoração, completamento de quadrados, fórmula resolutiva).

Aula 27 – Elaboração do plano de aula ("Atividade 5")

Objetivos: desenvolver, em duplas, uma proposta de ensino que introduza ou ilustre um método resolutivo específico para equações polinomiais.

Atividades:

- Redação colaborativa do plano de aula, contendo objetivos, justificativa didática, progressão curricular, descrição detalhada das tarefas e antecipação de erros e intervenções.

Unidade 3 – Continuação

Aula 28 – Avaliação entre pares e refinamento dos planos de aula

Objetivos: exercitar a leitura crítica de planos de ensino e aprimorar o próprio trabalho a partir de *feedbacks* construtivos.

Atividades:

- Troca de planos entre duplas e avaliação entre pares, com base na rubrica oficial da atividade.
- Discussão dos comentários recebidos e decisão sobre refinamentos.
- Revisão e entrega da versão final para avaliação docente.

Aula 29 – Devolutiva docente dos planos de aula e socialização de aprendizados

Objetivos: promover a devolutiva formativa da "Atividade 5" e compartilhar boas práticas de planejamento.

Atividades:

- Apresentação das principais tendências e destaques observados nas produções.
- Exposição dialogada de exemplos ilustrativos (organização, coerência, criatividade).
- Discussão sobre como o planejamento traduz concepções de ensino e aprendizagem da álgebra.

Aula 30 – Fechamento e avaliação global do curso

Objetivos: realizar o encerramento reflexivo do curso, articulando aprendizagens conceituais, pedagógicas e epistemológicas.

Atividades:

- Discussão avaliativa sobre o alcance dos objetivos formativos e os principais aprendizados consolidados.
- Registro individual de metarreflexão: "O que aprendi sobre ensinar álgebra e sobre aprender a ser professor de matemática?".
- Apresentação pelo docente de uma síntese do percurso formativo coletivo.

Foco formativo: fechamento do ciclo formativo com ênfase na autorregulação, na integração dos saberes e na valorização do processo de aprendizagem docente.

Exemplo de aula detalhado

Unidade 3 - Aula 24

CONTEÚDOS DA AULA

- Resolução de problema com equação quadrática;
- Análise de erros e produções de alunos da educação básica.

OBJETIVOS DA DISCIPLINA ABORDADOS NA AULA

4 **Aplicar diferentes métodos resolutivos para equações polinomiais, tais como isolamento da incógnita, fatoração, completamento de quadrados, fórmulas resolutivas, entre outros.**

6 **Interpretar resoluções de atividades de estudantes da educação básica sobre equações para subsidiar intervenções didáticas adequadas.**

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA AULA

Esta aula foca em um único problema contextualizado no qual a modelagem fornece uma equação quadrática com uma variável. Além de modelar e resolver o problema, os futuros professores deverão:

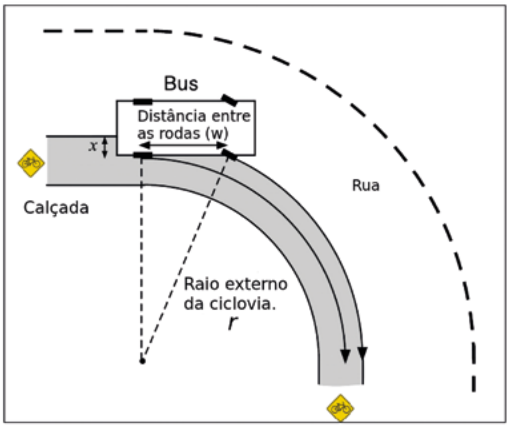
- Compreender e analisar a produção de estudantes na resolução da equação quadrática por meio de extração de raízes quadradas, completamento de quadrados, uso da fórmula quadrática e fatoração.
- Interpretar os resultados no contexto de uma situação real.

Atividade: Invadindo a ciclovia

Parte 1: Conteúdo matemático (CC)

Questão disparadora

Ao fazer uma curva, um ônibus deve virar com cuidado para evitar que sua roda traseira invada a ciclovia. Na imagem fornecida, observa-se que, enquanto a roda dianteira se mantém no limite da faixa, a roda traseira acaba por invadir a área destinada às bicicletas. O diagrama abaixo ilustra uma representação geométrica dessa situação, vista na imagem a seguir.



A distância entre as rodas dianteiras e traseiras (distância entre os eixos do ônibus) é **w**.

Seja **r** o raio da borda externa da ciclovia.

A distância marcada com **x** indica o quanto a roda traseira invade a ciclovia.

1. Use o diagrama para explicar que

$$x^2 - 2xr + w^2 = 0.$$

2. Considere **w = 3 metros** e **r = 5 metros**.

a) Descubra o quanto a roda traseira invade a ciclovia. Explique sua resposta.

b) Descubra a que distância a roda dianteira deve ficar da borda externa da ciclovia para que a roda traseira não invada a ciclovia.

Parte 2: Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (CPC)

Neste trabalho em grupo vocês irão analisar resoluções de estudantes para o item (2a) da questão disparadora resolvida anteriormente. A entrega deverá conter:

c) uma resolução do grupo para a questão original

d) análise da resolução – Ryan;

e) análise da resolução – Dora;

f) análise da resolução – Gui;

g) análise da resolução – Liam.

Suas respostas devem ser completas para evidenciar a compreensão do grupo sobre cada situação apresentada. Ou seja, inclua resoluções matemáticas e texto com explicações sobre suas observações.

ATENÇÃO

As resoluções apresentadas vieram de um material produzido na Inglaterra. Os valores usados nas resoluções dos estudantes estão em pés (e não em metros). Com isso, foram usados r = 17 pés e w = 10 pés e usa-se "." (ponto) em vez de "," (vírgula) para separar a parte inteira da parte decimal de números.

Bom trabalho!

Ryan

$$x^2 - 2xr + w^2 = 0$$

$$r = 17 \quad w = 10$$

$$x^2 - 34x + 100 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 - 4.1.100}}{2}$$

$$= \frac{-34 \pm \sqrt{756}}{2}$$

$$x = -30.75 \quad \text{or} \quad x = -3.25$$

R1) Ryan usou a fórmula para encontrar as raízes da equação quadrática. Ryan cometeu algum erro? Explique.

R2) Cite, pelo menos, uma vantagem e uma desvantagem desse método. Justifique.

Dora

Teste $x = 10$

$10^2 - 34 \times 10 + 100 = -140$

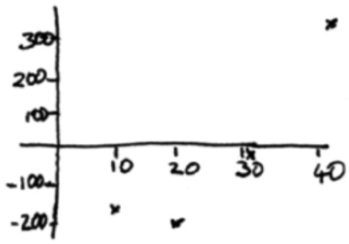
$x = 20$

$20^2 - 34 \times 20 + 100 = -180$

$x = 30$

$30^2 - 34 \times 30 + 100 = -20$

$x = 40$



$40^2 - 34 \times 40 + 100 = 340$

x entre 30 e 40. Teste $x = 35$

$35^2 - 34 \times 35 + 100 = 135$

$x = 32$ $\quad 32^2 - 34 \times 32 + 100 = 36$

$x = 31$ $\quad 31^2 - 34 \times 31 + 100 = 7$ $\quad \underline{\underline{x = 31}}$

D1) Qual foi o método usado por Dora para obter a solução procurada?

D2) Apresente uma explicação sobre por que Dora deve ter feito o rascunho usando o plano cartesiano.

D3) Comente vantagens e desvantagens da solução de Dora. Justifique.

Gui

D1) Qual foi o método usado por Dora para obter a solução procurada?

D2) Apresente uma explicação sobre por que Dora deve ter feito o rascunho usando o plano cartesiano.

D3) Comente vantagens e desvantagens da solução de Dora. Justifique.

$r = 17 \quad w = 10$

$\cancel{x^2 - 34x + 100 = 0}$

$\cancel{(x-10)(x-10)}$

$\cancel{(x-20)(x-5)}$

$\cancel{(x-25)(x-4)}$

$x^2 - 34x + 100 = 0$

$(x-17)^2 - 289 + 100 = 0$

$(x-17)^2 = 189$

$x - 17 = 13.75 \quad \underline{x = 30}$

Liam

$$17^2 = a^2 + 10^2$$

$$a^2 = 289 + 100$$

$$= 389$$

$$a = 19.72$$

L1) Qual foi o método que Liam usou? Explique.

L2) Qual foi o erro cometido? Explique, refazendo a resolução correta (mantendo o método).

L3) Como você explicaria para a turma o método usado por Liam?

Arquivo com as questões em formato editável pode ser acessado **aqui**.

Referência

MATHEMATICS ASSESSMENT PROJECT (MAP). **Solving Quadratic Equations**. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, 2015. Disponível em: **https://www.map.mathshell.org/download.php?fileid=1736**. Acesso em: 10 nov. 2025.

SUGESTÕES PARA A AULA

É muito importante que toda a turma tenha tempo para refletir e resolver a questão disparadora, pois as questões seguintes serão análises de estratégias diversas para essa resolução. Uma opção é dar um tempo para que os estudantes pensem individualmente sobre a questão e, apenas depois de conseguirem esboçar alguma ideia, os grupos sejam formados. Na modelagem, os estudantes devem notar que o esquema sugere um triângulo retângulo. Verifique que todos estão de acordo com os ângulos formados pelo eixo do ônibus e pelos raios das circunferências sugeridas.

Como se trata de uma situação real, a solução cujo valor é negativo não precisa ser considerada, mas é importante que a turma perceba isso e seja capaz de interpretar o que seria o significado desse valor.

Incentive os grupos a conversarem sobre cada resolução, em vez de cada um olhar individualmente uma delas. A discussão cria oportunidades de conhecer dificuldades e de notar nuances que, sozinhos, talvez não aparecessem.

A solução de Ryan foi usar a fórmula para obter as raízes de uma equação quadrática. Ela é a primeira a ser apresentada pois é bem provável que seja uma estratégia conhecida por toda a turma, o que ajuda a focar a discussão em aspectos pedagógicos da resolução.

A solução de Dora é diferente, mas apresenta elementos que sugerem a estratégia, como a palavra “teste”. Além disso, o plano cartesiano costuma ser familiar para os estudantes. Incentive-os a descrever o comportamento do gráfico (mesmo que seja apenas apresentado alguns pontos).

As tentativas de fatoração riscadas de Gui sugerem qual valor ele estava usando: multiplicações cujo produto era 100. O método seguinte é o completamento de quadrados puramente algébrico, com a ideia de compensar. É possível que alguns grupos consigam observar que as equações dadas são equivalentes, mas não sejam capazes de reproduzir a estratégia com outros valores. Durante a discussão, certifique-se de que a compreensão geral foi atingida por todos.

Liam, apesar de não obter o valor correto, apresenta uma solução bastante sucinta. Muitos estudantes podem não notar que o “$a = 17 - x$”. Aqui, a ideia de substituição de variáveis se mostra de forma simples e vantajosa em termos de obter a solução procurada.

$\int(x)$

∞

π

CÁLCULO DIFERENCIAL

com funções polinomiais, racionais e exponenciais: modelagem e múltiplas representações

Leonardo Barrichello[1], Disney Douglas de Lima Oliveira[2], Bruno Dias Amaro[3]

INFORMAÇÕES GERAIS DA DISCIPLINA

Semestre estimado de curso:
2º semestre

Carga horária prevista:
60 horas

Número de semanas previstas:
15 semanas

Duração das aulas:
4 horas semanais

[1] Lattes: http://lattes.cnpq.br/9219763853557280
[2] Lattes: http://lattes.cnpq.br/0809035825922353
[3] Lattes: http://lattes.cnpq.br/5156880194736533

O CPC no programa "Cálculo diferencial com funções polinomiais, racionais e exponenciais"

Bárbara Born

O último programa expandido de disciplina trabalha com um conteúdo mais tradicionalmente associado ao curso de Licenciatura em Matemática. Como o leitor poderá perceber, trata-se de um curso que apresenta uma carga mais intensa de conteúdos especializados, desempenhando papel estruturante no desenvolvimento do conhecimento especializado do conteúdo por parte dos estudantes.

Essa ênfase mais acentuada no conteúdo, todavia, não coloca o CPC em segundo plano. Como discutido no capítulo introdutório, um entendimento profundo dos saberes disciplinares é essencial para que o professor desenvolva sua capacidade de representar o conteúdo de maneira adequada. No caso específico desta disciplina, os autores do programa exploram em profundidade conhecimentos essenciais para o currículo da educação básica, articulando-os, ao longo do processo, com saberes matemáticos mais característicos do ensino superior.

Além do foco no conhecimento curricular — apontado pela literatura de CPC como um de seus elementos estruturantes —, o programa destaca dois aspectos centrais para a formação do futuro professor: a modelagem matemática e as múltiplas representações.

No caso da formação do futuro professor de matemática, o uso da modelagem é particularmente relevante porque oferece um repertório que estabelece uma ponte entre situações do mundo real e conceitos matemáticos. Em especial, auxilia os licenciandos a responderem a questionamentos comuns na escola, ao construir ferramentas que os ajudem a compreender a matemática como linguagem e instrumento para interpretar o mundo.

O curso também dedica atenção importante ao uso de diferentes representações para o trabalho com funções de uma variável. As múltiplas formas de representar um mesmo conteúdo são elementos estruturantes da formação docente e contribuem de modo decisivo para a elaboração de planos de aula efetivos, capazes de favorecer a compreensão dos estudantes da educação básica.

Do ponto de vista avaliativo, o programa sugere o uso de instrumentos mais presentes no contexto acadêmico. Ainda assim, é relevante observar como essas propostas articulam o conhecimento especializado do conteúdo ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Nos exemplos apresentados pelos autores, um mesmo problema matemático é explorado tanto para investigar a construção do conhecimento e a capacidade de aplicação dos licenciandos quanto para propor questões sobre como estudantes da educação básica lidariam com o problema.

Um ponto importante a ser destacado para aqueles que utilizem ou se inspirem nesse programa é que a maneira como a disciplina é conduzida é fundamental para o desenvolvimento do CPC dos licenciandos. Além do foco na modelagem matemática e na construção de um repertório sólido sobre representações, é essencial empregar estratégias variadas de ensino e oferecer múltiplas oportunidades para que os estudantes analisem a prática do docente da disciplina de modo metacognitivo, fortalecendo, assim, sua formação enquanto futuros professores.

Descrição da disciplina

A disciplina revisita algumas famílias de funções elementares vistas na educação básica, nomeadamente as funções polinomiais, racionais e exponenciais, aprofundando o entendimento de suas características essenciais. Para tanto, os conceitos de limite e derivada de funções de uma variável serão introduzidos e discutidos, ampliando o entendimento das características dessas funções e as possibilidades de aplicações em novos tipos de problemas. Ao longo do curso, os estudantes terão contato com a modelagem e farão uso de múltiplas representações de forma bastante intensa.

Objetivos da disciplina

Durante esta disciplina, você construirá conhecimentos sobre o conceito de função de uma variável para além do que já é visto na educação básica, incluindo as ideias de limite e derivadas. Também desenvolverá habilidades matemáticas relacionadas à modelagem e ao uso de múltiplas representações. Esperamos que, ao final do módulo, você possa:

- modelar algebricamente problemas do mundo real, tendo a experiência significativa com o uso de modelagem matemática em sala de aula;
- utilizar múltiplas representações (algébrica, gráfica e numérica) no estudo de funções de uma variável, especialmente a partir do uso de *softwares* ou outros recursos de tecnologias digitais;
- compreender as características de famílias de funções elementares (polinomiais, exponenciais e logarítmicas), incluindo tanto aspectos que podem ser discutidos na educação básica quanto aspectos avançados envolvendo os conceitos de limites e derivadas;
- aplicar os conceitos de funções, limites e derivadas no entendimento de fenômenos diversos.

IMPORTANTE

A premissa central por trás da elaboração desta disciplina é que os conceitos típicos de uma disciplina de cálculo diferencial são introduzidos como ferramentas adicionais para aprofundar o entendimento das famílias de funções elementares que são tipicamente estudadas na educação básica.

Dessa forma, o ponto de partida de cada uma das unidades que serão apresentadas a seguir são funções discutidas na educação básica e o avanço dentro do módulo segue uma lógica de aprofundamento do entendimento das suas características em ciclos que, consequentemente, adensam o entendimento dessas novas ferramentas.

Por exemplo, a primeira unidade, que trata de funções polinomiais, tem início com a modelagem de fenômenos lineares e progressivamente, introduz as ideias de limites, a partir do comportamento destas funções e a ideia de derivada, a partir da identificação gráfica de máximos e mínimos de funções quadráticas e cúbicas. As demais unidades, com outras famílias de funções, seguem os mesmos princípios, adequados à realidade de cada família de funções.

Avaliação e notas

Esperamos que você assista a todas as aulas, participe ativamente e apresente todas as tarefas a tempo. Sugerimos a utilização de dois instrumentos concebidos especificamente para esta disciplina:

- Atividades curtas semanais dos conteúdos abordados naquela semana.
- Provas, por unidade, que utilizem o mesmo contexto para modelagem matemática que possa ser discutida tanto em termos de conceitos da educação básica, bem como a conteúdos programáticos relacionados com o ensino superior.

Cada tarefa e/ou prova inclui instruções e critérios de avaliação. O critério (sugerido) é que a nota de cada Unidade seja composta por 20% da nota relacionada às atividades curtas semanais e 80% das provas. Nesse cenário, haverá 03 avaliações por Unidade de forma que, a critério do professor, essas avaliações podem ser ponderadas entre si à forma que o docente julgue procedente.

Se o seu desempenho não atingir o padrão esperado, havendo a disponibilidade de monitor, você será solicitado a revisar e apresentar novamente algumas (a critério do docente) das atividades avaliativas. Você deve procurar toda a ajuda que puder junto a seus pares, docente e (se houver) tutores e mentores.

Atividades avaliativas		Prazos de entrega
Atividades	Atividades curtas baseadas em conteúdos discutidos em sala de aula, a serem entregues na semana subsequente à aula dada.	Semanalmente
Prova 1	Prova baseada nos conteúdos abordados da primeira Unidade (Aulas 01 a 14)	Aula 15
Prova 2	Prova baseada nos conteúdos abordados da segunda Unidade (Aulas 16 a 29)	Aula 30

IMPORTANTE

A seguir, trazemos a justificativa para cada um dos instrumentos sugeridos acima:

- **atividades curtas semanais:** como a disciplina abrange uma quantidade significativa de tópicos propostos, essas atividades promovem um estudo contínuo dos conteúdos a fim de aprimorar o seu desenvolvimento ao longo do curso.

- **provas:** este instrumento vem para que o estudante demonstre domínio de tópicos que são relacionados à educação básica, mas que são necessários para o desenvolvimento de disciplinas futuras no decorrer do curso superior. Como o conteúdo da disciplina foi desenhado para manter proximidade com o currículo da Educação Básica, isso abre portas para que aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem também sejam explorados nas provas.

Tais sugestões vem ao encontro de dois aspectos que são centrais na consecução dos objetivos da disciplina. Primeiramente, é preciso ter em mente que todas as atividades dessa disciplina foram desenhadas como evidências da apropriação das habilidades e conteúdos trabalhados em cada aula. São esses elementos que você deve buscar na hora de analisar os trabalhos dos estudantes participantes e suas aulas devem contribuir para que eles construam habilidades necessárias para fazê-los.

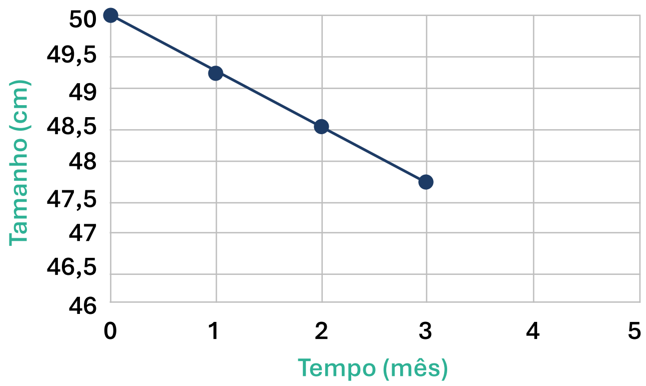
O segundo aspecto diz respeito às devolutivas que você dará aos estudantes. Havendo disponibilidade de apoio pedagógico, seriam especialmente recomendáveis devolutivas individuais e com profundidade para as atividades curtas semanais, uma vez que elas podem contribuir para o processo de aprendizagem e ter papel verdadeiramente formativo. No caso de não haver apoio ao docente, podem ser usadas estratégias alternativas, como uso de questões objetivas realizadas em ambientes online (Ambientes Virtuais de Aprendizagem) que facilitem a entrega e correção das atividades propostas.

Em relação ao critério de notas, sugerimos que a nota de cada Unidade seja composta por 20% da nota relacionada às atividades curtas semanais e 80% das provas.

Atividade 1 - Atividade curta semanal

Este é um exemplo de atividade curta semanal que combina, em uma mesma questão, aspectos matemáticos do currículo da educação básica (itens a e b) com aspectos que podem ser aprofundados com auxílio de matemática avançada (item d) e aspectos do conhecimento pedagógico de conteúdo (item c).

Questão: No espaço, a falta de gravidade faz com que o organismo produza mais cálcio e, como o mineral não é usado, o corpo o expele, fazendo com que os ossos diminuam de tamanho. Um dos ossos que mais sofrem essa redução é o fêmur. O gráfico apresenta a evolução linear do tamanho desse osso, ao longo de três meses, em um astronauta que, antes de ir para o espaço, tinha um fêmur de 50 cm.



DUARTE, M. O guia dos curiosos. São Paulo: Panda Books, 2015 (adaptado)

Supondo que esse comportamento se mantenha para mais tempo no espaço, obtenha a função que relaciona o tempo (**t**) no espaço (em meses) com o tamanho (**f**) do fêmur (em **cm**) para esse astronauta.

A partir da função obtida no item anterior, determine qual será o tamanho do fêmur após 6 meses no espaço.

Discuta a pertinência desse modelo para fazer predições sobre o tamanho do fêmur após períodos muito longos de permanência no espaço.

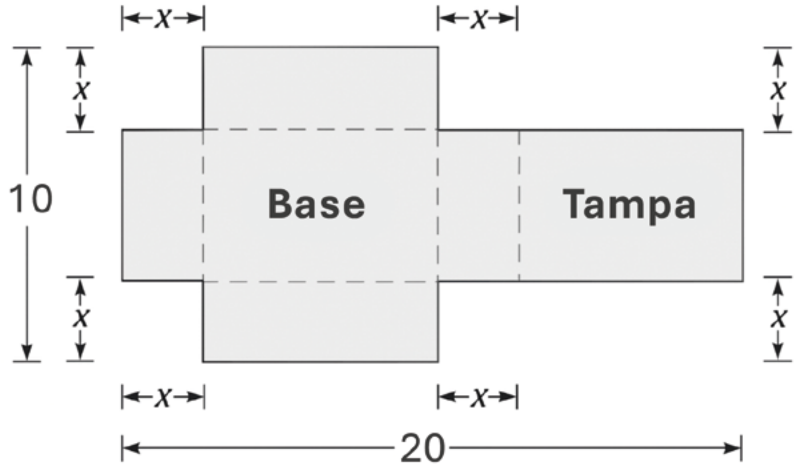
Embora essa questão esteja formulada em termos de funções, é possível resolver sem utilizar de forma direta esse conceito. Resolva a questão do item b utilizando uma estratégia que não dependa da obtenção explícita da função que relaciona **t** e **f**.

Discorra sobre quais conhecimentos matemáticos foram mobilizados na resolução do item anterior e aponte em qual nível de ensino essa abordagem já poderia ser discutida com estudantes da educação básica.

Atividade 2 - Prova

Este é um exemplo de duas questões que poderiam compor a prova da Unidade 1. A primeira questão é mais focada no conteúdo matemático, mas tem início com perguntas compatíveis com o currículo da educação básica. Já a segunda, foca em aspectos mais relacionados ao conhecimento pedagógico de conteúdo.

Questão 1: Deseja-se construir caixas com tampa a partir de uma folha de papelão medindo 20 cm por 10 cm. Para construir a caixa, dois quadrados e dois retângulos são removidos dos cantos da folha de papelão, como indicado na figura a seguir.



Determine o volume da caixa resultante quando x=1, x=2, x=3 e x=4 e indique o valor que resultou no maior volume.

Marque os pontos em um eixo cartesiano dado e indique, a partir desses valores, em qual intervalo pode estar um valor de x que resulte em um volume maior do que o obtido no item a. Justifique sua resposta.

Obtenha uma função que relacione volume da caixa resultante com a medida de x.

Determine, a partir das restrições do problema, o domínio dessa função e o menor valor que ela assume nesse intervalo.

Utilize derivadas para determinar os pontos críticos dessa função.

Utilize as características do gráfico sugerido pelos pontos do item b para justificar se o(s) ponto(s) crítico(s) encontrado(s) é (são) de máximo, mínimo ou inflexão.

Determine o maior volume que se pode obter pelo processo descrito na questão.

Questão 2: Na questão anterior, utilizamos derivadas para obter as coordenadas exatas do ponto de máximo do problema, porém, essa ferramenta não é discutida no ensino médio. De todo modo, essa mesma atividade poderia ser realizada neste nível de ensino a partir de duas estratégias:

1. Esboçar o gráfico da função a partir de alguns valores específicos e inferir, a partir dele, qual é o ponto de máximo
2. Construir o gráfico da função com auxílio de um *software* e obter o ponto de máximo da função.

Qual dessas estratégias você utilizaria caso desejasse realizar uma atividade baseada na questão anterior no ensino médio? Aponte as vantagens da sua escolha.

Referências bibliográficas

ÁVILA, Geraldo; ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de. **Cálculo**: ilustrado, prático e descomplicado. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

GOMES, Francisco Magalhães. **Pré-Cálculo**: operações, equações, funções e sequências. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A matemática do Ensino Médio**: volume 1. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção do Professor de Matemática).

NASSER, Lilian; BIAZUTTI, Angela Cássia. **Transição do Ensino Médio para o Superior**: pré-cálculo com resolução de problemas e GeoGebra. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2013. E-book. Disponível em: https://www.im.ufrj.br/images/documentos/prec_lculo_final.pdf. Acesso em: 26 nov. 2025.

NRICH. **Secondary Level Pure Resources**. Cambridge: University of Cambridge, [s.d.]. Disponível em: https://nrich.maths.org/level-pure-resources. Acesso em: 26 nov. 2025.

STEWART, James; CLEGG, Daniel K.; WATSON, Saleem. **Cálculo**: volume 1. Tradução de Ez2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2021.

UM LIVRO ABERTO. **Funções**. Rio de Janeiro: IMPA, [s.d.]. Disponível em: https://umlivroaberto.impa.br/producao/funcoes/. Acesso em: 26 nov. 2025.

UNDERGROUND MATHEMATICS. **Home**. Cambridge: University of Cambridge, [s.d.]. Disponível em: https://undergroundmathematics.org/. Acesso em: 26 nov. 2025.

UNIDADE 1
Funções polinomiais

A partir do estudo das funções polinomiais, iniciando com as funções afim e quadrática, o objetivo desta unidade é aprofundar o entendimento das características dessas funções e, ao longo do processo, introduzir e aplicar as ferramentas de limite e derivada dessa classe de funções. Também faz parte dos objetivos introduzir, via definição intuitiva, conceitos como continuidade e assíntotas. Ao final, introduzimos as funções racionais por oferecerem um contexto especialmente rico para discutir domínio, imagem, assíntotas e permitir novas aplicações. Ao longo de toda a unidade, discussões sobre modelagem e uso de múltiplas representações devem ser feitas para que o repertório dos estudantes se expanda, apoiando sua futura atuação na educação básica.

A tabela abaixo é uma sugestão de organização para as aulas dessa unidade com indicação dos tópicos matemáticos centrais e aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem de matemática que podem ser discutidos ao longo dos encontros.

Aula 1	Aula 6	Aula 11
Função afim e por partes: modelagem, gráficos e conexões entre elementos da representação algébrica e gráfica	**Funções cúbicas:** interpretação visual de derivadas; uso de ferramentas digitais para visualização e conexão entre os conceitos de retas secantes e tangentes	**Função racional:** modelagem explorando a relação entre diferentes áreas da matemática através de problemas de otimização com objetos geométricos
Aula 2	**Aula 7**	**Aula 12**
Função afim e por partes: ideias iniciais de limite e continuidade	A derivada como uma reta tangente ao gráfico em funções afim, quadrática e cúbica; uso de ferramentas digitais para visualização	**Função racional:** retomada de conceitos fundamentais de funções, como domínio, limite e gráficos; foco na compreensão conceitual e erros comuns na educação básica
Aula 3	**Aula 8**	**Aula 13**
Funções quadráticas: modelagem, gráficos e conexões entre elementos da representação algébrica e gráfica	Relação das derivadas com velocidade e aceleração	**Função racional:** assíntotas
Aula 4	**Aula 9**	**Aula 14**
Funções quadráticas: modelagem e otimização	Técnicas de derivação para funções polinomiais	Modelagem como abordagem de ensino; problemas de otimização
Aula 5	**Aula 10**	**Aula 15**
Funções cúbicas: otimização de volumes, gráficos e uso de ferramentas digitais para articulação entre diferentes representações	Técnicas de derivação para funções polinomiais	Prova 1

UNIDADE 2

Exponenciais e logarítmicas; aplicações das derivadas

Na segunda unidade, expandimos as ferramentas e conceitos de cálculo diferencial que foram introduzidas na unidade anterior para o universo das funções exponenciais e logarítmicas. O intuito é aprofundar o conhecimento sobre as características dessas funções e, em um segundo momento, permitir a aplicação desses conhecimentos na modelagem de novos fenômenos. Ao final dessa unidade, são introduzidas algumas técnicas de derivação que podem ser usadas para outras classes de funções. Não faz parte dos objetivos deste curso a prática exaustiva dessas técnicas, pois o curso dá maior ênfase ao entendimento profundo das funções elementares. Entretanto, as técnicas foram incluídas por constituírem ferramental que pode ser usado em outras disciplinas e, por isso, é importante que os estudantes estejam familiarizados com elas.

A tabela abaixo é uma sugestão de organização para as aulas dessa unidade com indicação dos tópicos matemáticos centrais e aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem de matemática que podem ser discutidos ao longo dos encontros.

Aula 1	Aula 6	Aula 11
Equações e inequações exponenciais; potenciais erros de estudantes da educação básica ao aplicar as ferramentas conhecidas na resolução dessa nova família de equações	A derivada de função exponencial vista como limite	Regra do produto e quociente
Aula 2	**Aula 7**	**Aula 12**
Logaritmos na resolução de equações exponenciais; aspectos históricos sobre a origem do conceito de logaritmo	Técnicas de derivação de função exponencial	Regra da cadeia; potencialidades de uso de *softwares* para obtenção de derivadas mais complexas
Aula 3	**Aula 8**	**Aula 13**
Logaritmos na resolução de equações exponenciais	Técnicas de derivação de função logarítmica	Resolução de problemas aplicados; conexões entre essa metodologia e a modelagem matemática
Aula 4	**Aula 9**	**Aula 14**
Função exponencial: modelagem e gráficos	**Funções não elementares (produto, quociente e composta):** gráficos; potencialidades de uso de *softwares* para plotar gráfico de funções na educação básica	Resolução de problemas aplicados
Aula 5	**Aula 10**	**Aula 15**
Função exponencial: modelagem e gráficos; práticas interdisciplinares via problemas que envolvem relações exponenciais	**Funções não elementares (produto, quociente e composta):** otimização	Prova 2

Descrição geral de um conjunto de aulas

Aulas 5, 6 e 7

CONTEÚDOS DO BLOCO DE AULAS

- Modelagem de um problema aplicado
- Funções cúbicas
- Gráfico
- Valores máximos e mínimos
- Domínio

OBJETIVOS DA DISCIPLINA ABORDADOS NO BLOCO DE AULAS

- Discutir as características das funções cúbicas
- Introduzir o conceito de derivada a partir de um problema de otimização
- Aplicar o conceito de derivada para uma função específica
- Aplicar modelagem para resolver um problema aplicado
- Utilizar múltiplas representações na resolução de um problema

Descrição geral do bloco de aulas

1. O bloco de aulas tem início com a apresentação do problema de otimização do volume de uma caixa de papel sem tampa construída a partir de uma folha tamanho A4. Em um primeiro momento, segue-se uma abordagem compatível com o ensino médio, em que os estudantes constroem fisicamente as caixas, medem as suas dimensões, calculam o volume e identificam o maior valor obtido. Essa abordagem é descrita no repositório de recursos educacionais multimídia da Unicamp (M3 Matemática Multimídia, [s.d]);

2. Em um segundo momento, a investigação migra para o ambiente digital e sugere-se que os estudantes explorem a construção com o auxílio de algum *software* de geometria dinâmica, possibilitando a análise de mais valores de **x**, gráfico da função específica do problema e da função em sentido mais geral. Nesse momento, identificam-se propriedades visuais do ponto de máximo dessa função particular, permitindo que na próxima aula isso seja algebrizado. Uma sugestão de construção dinâmica que pode ser usada nessa aula está disponível na seção de recursos da plataforma GeoGebra (Douglas, [s.d.]);

3. Na última parte, apresenta-se o conceito de derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico, entendida como uma secante quando a variação em **x** se torna cada vez menor. Com isso, aplica-se o conceito de tangente à função específica do problema usando a notação de limite para calcular sua derivada. Ao igualar esse resultado a zero, obtêm-se valores que são analisados levando em conta o gráfico discutido na aula anterior.

SUGESTÕES PARA A AULA

Note que esse bloco de aulas segue a proposta de iniciar um conteúdo com uma atividade que seja compatível com a educação básica e, como consequência de uma discussão cada vez mais profunda, atinge conceitos e ferramentas típicos do ensino superior.

O problema escolhido é formulado como uma questão de modelagem e é resolvido pelo uso de múltiplas representações. Esses dois aspectos devem ser discutidos e salientados ao longo da sequência de aulas para que os futuros professores estejam cientes das suas características e potencialidades.

Outro aspecto relevante se refere a como o conceito de derivada é tratado: com menos ênfase na prática de aplicação de técnicas de derivação e mais ênfase na motivação para criação do conceito e no seu significado conceitual. Isso se alinha à nossa visão de que tecnologias devem ser incorporadas de forma mais orgânica ao trabalho matemático. Como atualmente é muito simples ter acesso a **softwares** que são capazes de aplicar técnicas de derivação, esse aspecto pode ser menos enfatizado em um curso para futuros professores da educação básica.

Também queremos salientar a grande variedade de representações que podem ser usadas ao longo desse bloco de aulas: construções físicas, tabelas de dados, plano cartesiano, construções digitais e representações algébricas. Todas elas aparecem naturalmente integradas à forma como o problema está sendo discutido ao longo do bloco de aula, permitindo, inclusive, a conexão entre elas.

REFERÊNCIAS

DOUGLAS, Disney. **Otimização: caixa com tampa**. [S. l.]: GeoGebra, [s.d.]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/f6tc2gmu. Acesso em: 27 nov. 2025.

M3 MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. **Caixa de papel**. Campinas: UNICAMP, [s.d.]. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367. Acesso em: 27 nov. 2025.


5 + 8 =
10 + 3 =
14 + 15 =
24 + 6 =

ANEXOS

Anexo 1 - Modelo CoRe adaptado ao planejamento de formação docente

Bárbara Barbosa Born

O modelo de representação de conteúdo, ou CoRe (do inglês Content Representations) foi criado por Loughran, Berry e Mulhall (2012) para orientar professores da educação básica em seu processo de planejamento. Por meio de perguntas reflexivas, ele conduz o docente em uma exploração do conteúdo que desvela o conhecimento pedagógico do conteúdo e apoia a etapa seguinte de planejamento. Para o GT de CPC em matemática, trabalhamos com uma versão adaptada do modelo, focando no desenho de programas disciplinares de licenciaturas. Sugerimos que esse modelo seja usado individual ou coletivamente como etapa inicial para a elaboração de currículos formativos. Em cada seção proposta, explicamos brevemente o que se espera que seja feito em termos de reflexão para que a etapa do planejamento seja bem-sucedida.

Conteúdo(s) selecionado(s)	Por que o grupo selecionou esse conteúdo para aprofundar a reflexão?
[Qual conteúdo dentro da disciplina de ensino você gostaria de explorar?]	**[Nesta pergunta, reflita:** por que é interessante explorar esse conteúdo? Qual a sua relevância para o conjunto da disciplina? Por que ele te ajudará a refletir sobre o ensino na educação básica?]

Considerando o conteúdo selecionado, quais são três (ou mais) grandes ideias que você considera estruturantes para a aprendizagem de um futuro professor?		
Grande ideia 1	**Grande ideia 2**	**Grande ideia 3**
[As grandes ideias são compreensões centrais, ideias-chave que compõem esse conteúdo de ensino. São os aspectos inegociáveis a serem aprendidos pelos licenciandos.]		

Agora, vamos refletir de maneira estruturada sobre cada uma dessas ideias. Discorra sobre as perguntas da primeira coluna para cada uma das três grandes ideias elencadas por você na tabela anterior.

	Grande ideia 1	Grande ideia 2	Grande ideia 3
Do ponto de vista da aprendizagem matemática (ou histórica, geográfica, entre outras), por que essa é uma grande ideia relevante?	[As grandes ideias são compreensões centrais, ideias-chave que compõem esse conteúdo de ensino. São os aspectos inegociáveis a serem aprendidos pelos licenciandos.]		
Do ponto de vista do ensino, por que é importante que os futuros professores aprendam sobre essa ideia?	[O objetivo desta parte é refletir em que medida essa grande ideia se relaciona com o processo de ensino, ou seja, porque ela é relevante especificamente para um futuro professor.]		
Quais são as grandes ideias pedagógicas relacionadas com as grandes ideias matemáticas?	[Nesta parte, reflita sobre aspectos essencialmente pedagógicos relacionados à grande ideia selecionada, ou seja, quais aprendizagens o licenciando deve consolidar do ponto de vista de sua preparação como professor.]		
Como essa grande ideia se traduziria na educação básica?	[Nesta parte, reflita sobre quais aprendizagens ou entendimentos disciplinares são esperados na educação básica referentes à ideia selecionada.]		

Agora, vamos refletir sobre o processo de aprendizagem e ensino dessas grandes ideias na formação de futuros professores.

	Grande ideia 1	Grande ideia 2	Grande ideia 3
O que você sabe sobre como os licenciandos pensam a respeito da matemática e dos saberes que eles levam para a universidade que podem interferir na aprendizagem desta grande ideia (conhecimentos prévios, percepções do mundo, incompreensões)?	[As grandes ideias são compreensões centrais, ideias-chave que compõem esse conteúdo de ensino. São os aspectos inegociáveis a serem aprendidos pelos licenciandos.]		
O que você sabe a respeito das concepções dos licenciandos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática na educação básica que podem interferir na aprendizagem desta grande ideia (conhecimentos prévios, percepções do mundo, incompreensões)?	[O objetivo desta parte é refletir em que medida essa grande ideia se relaciona com o processo de ensino, ou seja, porque ela é relevante especificamente para um futuro professor.]		
Quais outros fatores influenciam o ensino dessas ideias em seu contexto de atuação?	[Nesta parte, reflita sobre aspectos essencialmente pedagógicos relacionados à grande ideia selecionada, ou seja, quais aprendizagens o licenciando deve consolidar do ponto de vista de sua preparação como professor.]		

A partir das considerações realizadas nas seções anteriores, responda:

O que deve ser levado em conta na hora de elaborar um programa expandido de curso que trabalhe essas grandes ideias?	[De tudo que você elencou sobre o conteúdo em questão, quais aspectos são relevantes para o processo de planejamento? O que você gostaria de incorporar no programa de disciplina?]
O que você precisa (ferramentas, materiais, leituras) para elaborar o programa de curso que trabalhe essas ideias?	[Aqui, espera-se que você antecipe, a partir das reflexões, quais recursos precisam ser buscados para garantir um melhor planejamento.]

A versão editável deste material pode ser baixada pelo botão abaixo:

ACESSAR EDITÁVEL

Anexo 2 - Modelo de planejamento de programa de disciplina expandido

Bárbara Barbosa Born

Este modelo de desenho de disciplina foi desenvolvido tendo como base a proposta de planejamento reverso de Wiggins e McTighe (2005). Em cada seção, há pequenas explicações sobre o que deve ser planejado. Sugerimos fortemente a leitura do livro de referência. Inspire-se e consulte os planos de disciplina exemplares dessa publicação para maior clareza no uso do modelo.

TÍTULO DA DISCIPLINA

- Informações gerais da disciplina
- Semestre estimado de curso:
- Carga horária prevista:
- Número de semanas previstas:
- Duração das aulas:

Descrição da disciplina

[Explicação narrativa sobre o que será visto pelos estudantes ao longo do semestre letivo]

Objetivos da disciplina

Durante esta disciplina, você ampliará suas habilidades para [...] e construirá conhecimentos sobre [...]. Esperamos que, ao final do módulo, você possa:

[Lista de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para os licenciandos. Lembre-se de que os objetivos de aprendizagem concentram tudo aquilo que é essencial que esse estudante saiba e possa fazer ao final do semestre. Nesse sentido, eles devem versar tanto sobre os saberes matemáticos quanto sobre o entendimento de como trabalhar essa matemática com seus estudantes. Os objetivos são a base para a construção dos instrumentos avaliativos.]

Avaliação e notas

[Explicação do sistema de avaliação que será adotado pela disciplina. O texto abaixo é uma sugestão]

Esperamos que você assista a todas as aulas, participe ativamente e apresente todas as tarefas no prazo. Cada tarefa inclui instruções e critérios de avaliação. Comentários críticos (por seus pares, docente e monitores) sobre as tarefas vão esclarecer se todos os critérios foram atendidos completa ou parcialmente. Se o seu desempenho não atingir o padrão esperado, você será solicitado a revisar e apresentar novamente o trabalho. Você deve procurar toda a ajuda que puder com seus pares, docente e monitores. Você poderá reapresentar a mesma tarefa para obter uma avaliação mais positiva.

[Descrição narrativa geral das atividades, frequência esperada e rigor na qualidade da entrega.]

Você deverá completar: [Quadro resumo com as entregas esperadas – tantas quantas necessárias a partir da visão do desenho do programa, e que sejam suficientes para averiguar o alcance dos objetivos de aprendizagem.]

[Lembre-se que a proposta de atividades avaliativas deve apoiar a verificação do alcance dos objetivos de aprendizagem]

Atividades avaliativas		Prazos de entrega
Atividade 1		Aula X ___/___/___
Atividade 2		Aula Y ___/___/___
Atividade N...		Aula Z ___/___/___

Atividade 1 – *[Título]*

[Descrição da atividade esperada pelos alunos, com detalhes. Inserir critérios de avaliação.]

[Destaque quais objetivos de aprendizagem serão avaliados com essa atividade.]

Atividade 2 – *[Título]*

[Descrição detalhada da atividade. Inserir critérios de avaliação.]

[Destaque quais objetivos de aprendizagem serão avaliados com essa atividade.]

Atividade N... – *[Título]*

[Descrição detalhada da atividade. Inserir critérios de avaliação]

[Destaque quais objetivos de aprendizagem serão avaliados com essa atividade.]

Referências bibliográficas

[Lista de textos sugeridos para a disciplina.]

Quadro síntese com sugestão da distribuição de grandes tópicos por aula

Unidade 1 [Se pertinente, organizar as aulas em unidades temáticas, dentro das quais as avaliações podem ser agrupadas]	**Aula 1**	**Aula 2**	**Aula 3**	**Aula 4**
Unidade 2	**Aula 5**	**Aula 6**	**Aula 7**	**Aula 8**
Unidade 3	**Aula 9**	**Aula 10**	**Aula 11**	**Aula N** ...

Unidade 1 – *[Insira o número]*

Aula – *[Insira o número]*

CONTEÚDOS DA AULA

[Detalhamento, em tópicos, do conteúdo a ser trabalhado em aula.]

LEITURAS PARA A AULA (sugeridas aos estudantes)

[Listar autores e obras relevantes para o tópico abordado.]

OBJETIVOS DA DISCIPLINA ABORDADOS NA AULA

1. *[Detalhar, em formato de tópicos, os objetivos a serem alcançados com a disciplina.]*

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA AULA

- [Completar, em formato de tópicos, os objetivos específicos da aula.]

Plano de aula

[Aqui, estrutura-se o plano da aula especificamente, com detalhamento de atividades e ações que levarão aos objetivos específicos do curso.]

Antecipação de compreensões, incompreensões e outros aspectos para ficar em alerta

[Aqui, estamos falando das incompreensões, aspectos delicados do conteúdo que precisam ser considerados, potenciais rumos de discussão que precisam ser antecipados pelo docente.]

A versão editável deste material pode ser baixada pelo botão abaixo:

ACESSAR EDITÁVEL

Há muitos caminhos para transformar a educação, todos eles passam pelos professores!

Conheça mais sobre a nossa agenda em profissaodocente.org.br